Kommentar zu [H 1897a]

W. Purkert[1]

1. Zur Entstehung von Hausdorffs Arbeit

Hausdorffs Arbeit *Das Risico bei Zufallsspielen* ist in unmittelbarem Zusammenhang mit seiner Lehrtätigkeit als Privatdozent an der Universität Leipzig entstanden. Nach der Habilitation hatte Hausdorff im Wintersemester 1895/96 mit Vorlesungen über *Figur und Rotation der Himmelskörper* und über *Kartenprojection* begonnen. Danach hat er sich in der Lehre ganz der Mathematik zugewandt. Daß unter den Gebieten, über die er dann vortrug, auch die Versicherungs- und Finanzmathematik einen wichtigen Platz einnahm, ist vor allem Anregungen von außen zuzuschreiben.

Seit der sogenannten Gründerzeit hatte sich das Versicherungswesen im Deutschen Reich zu einem bedeutenden Wirtschaftsfaktor entwickelt.[2] Damit verbunden waren in den neunziger Jahren Bestrebungen, eine universitäre Ausbildung künftiger Fachleute auf diesem Gebiet ins Leben zu rufen, welche insbesondere auch die Vermittlung versicherungsmathematischer Grundlagen einschließen sollte. Im Wintersemester 1895/96 wurde in Göttingen ein Seminar für Versicherungswissenschaft gegründet, an dem der Privatdozent Georg Bohlmann einen Lehrauftrag für Versicherungsmathematik wahrnahm.[3] Am Polytechnikum in Dresden war schon vor 1895 regelmäßig über Versicherungsmathematik gelesen worden; 1896 wurde unter Leitung von Georg Helm das „Versicherungstechnische Seminar“ gegründet.[4] Sachsens bedeutendstes Finanz- und Handelszentrum war jedoch Leipzig, und so war es nur folgerichtig, daß die sächsische Regierung im Sommer 1895 die Handelskammer in Leipzig zu einem Gutachten über die Frage aufforderte, ob die Aufstellung eines Studienplanes für Versicherungstechniker und die Einführung eines entsprechenden Examens „einem erheblichen Staatsinteresse entsprächen“.[5] Die Handelskammer lehnte einen eigenen Studiengang mit Staatsexamen entschieden ab, sprach sich aber wärmstens für Vorlesungen über Fragen des Versicherungswesens aus. Daraufhin wandte sich der sächsische Kultusminister Paul von Seydewitz am 3. 12. 1895 mit einer entsprechenden Bitte an die Philosophische Fakultät der Universität Leipzig.[6] Die Fakultät antwortete im März 1896,

[1] Für Hinweise und Verbesserungsvorschläge danke ich den Herren H.-J. Girlich (Leipzig) und K. D. Schmidt (Dresden).

[2] Die Anzahl der Policen wuchs von 348.930 im Jahre 1870 auf 1.475.529 im Jahre 1900. Quelle: [Bra 1925/1963], S. 269, 350. Dort findet man auch detaillierte Angaben für andere Länder und einen Überblick über die Entwicklung der Versicherungswissenschaft.

[3] [Lo 1922], S. 288; s. auch [Ko 1998], S. 135–142.

[4] [V 2003].

[5] [Ma 1903], S. 32.

[6] Archiv der Universität Leipzig. Akten der Philosophischen Fakultät, betr. Ausbildung von Versicherungstechnikern. C 3/31 1895–1897, Bl. 1.

> daß die Frage der Ausbildung im Versicherungswesen bereits vor längerer Zeit die Aufmerksamkeit der hiesigen Vertreter der Mathematik und Nationalöconomie auf sich gezogen hat und daß auf ihre Veranlassung der Privatdocent Dr. Hausdorff sich entschlossen hat – zunächst für das Bedürfniß der Studirenden der Nationalöconomie und Statistik – im nächsten Sommersemester eine diesbezügliche Vorlesung: ‚Einführung in die mathematische Theorie des Versicherungswesens' (eventuell mit Uebungen) und nächsten Winter eine solche über ‚Mathematische Statistik' zu lesen.[7]

Im Sommersemester 1896 las Hausdorff *Mathematische Einführung in das Versicherungswesen.* In dieser Vorlesung ging es nach einer Einführung in die Zinseszins- und Rentenrechnung sowie in die Anfänge der Wahrscheinlichkeitstheorie um den Aufbau und die Problematik von Sterbetafeln und vor allem um die Berechnung der Barwerte (und damit der Nettoprämien) verschiedener Renten und Versicherungen. Der Begriff des Risikos wird nur kurz erwähnt, aber nicht weiter behandelt. In den Vorbemerkungen betont Hausdorff, daß es ein langer Weg von der theoretischen Einsicht zu praktisch brauchbaren Verfahren ist:

> [...] vor nichts ist mehr zu warnen als vor theoretischem Übermuth, der sine grano salis vom Papier ins Leben übersetzt.[8]

Hausdorff bemerkt dort auch, daß die Vorlesung durch „ministerielle Anregung" veranlaßt worden sei.

Im Sommersemester 1897 folgt die *Politische Arithmetik.*[9] Diese Vorlesung offenbart bereits einen Zug des Mathematikers Hausdorff, der typisch für sein ganzes späteres Schaffen war: Er studiert seine Vorgänger kritisch, verbessert Fehler und Ungenauigkeiten, erkennt Möglichkeiten zu weitgehender Verallgemeinerung und stellt tragfähige Begriffe in den Mittelpunkt. Hausdorff selbst bemerkt zu seinen Motiven im einleitenden Abschnitt von [H 1897a]:

> Mir kam es mehr auf die Consequenz und Klarheit der Grundbegriffe, als auf absolute Neuheit der Resultate an; und ich kann nicht behaupten, dass ich in den mir vorliegenden Arbeiten [...] jene Consequenz gefunden hätte.[10]

[H 1897a] ist in großen Teilen in der Vorlesung *Politische Arithmetik* vorweggenommen; einige Passagen sind natürlich gegenüber der Vorlesung noch genauer ausgearbeitet und erweitert worden.

---

[7] Ebd., Bl. 5. Zitiert bei H. Girlich in [Gi 1996], S. 36.

[8] NL Hausdorff : Kapsel 01 : Fasz. 02, Bl. 1.

[9] NL Hausdorff : Kapsel 01 : Fasz. 03. Was man um die Jahrhundertwende in etwa unter politischer Arithmetik verstand, zeigt das damals weit verbreitete Büchlein von Moritz Cantor ([C 1898]): Zins- und Zinseszinsrechnung, Tilgungsrechnung, Rentenrechnung, Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Lebensversicherungsmathematik. Alle diese Themen behandelte Hausdorff auch in seiner Vorlesung, allerdings theoretisch anspruchsvoller als in Cantors Buch.

[10] [H 1897a], S. 498.

Hausdorffs Vorlesungen *Mathematische Einführung in das Versicherungswesen* (die er auch in den Sommersemestern 1898 und 1900 hielt) und *Politische Arithmetik* fanden an der Universität statt; sie standen jedoch auch unter der Rubrik „Vorlesungen an der Universität“ im Vorlesungsverzeichnis der „Öffentlichen Handelslehranstalt“, der späteren Handelshochschule. Vom Wintersemester 1901/02 an bis zu seinem Weggang nach Bonn 1910 hat Hausdorff an der Handelshochschule Semester für Semester *Politische Arithmetik* gelesen.[11]

2. Zufallsspiele und ihr Risiko

Hausdorff muß bei der Vorbereitung seiner Vorlesung klar gewesen sein, daß sich ganz verschiedene für das Finanz- und Versicherungswesen relevante Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch ein und dasselbe mathematische Modell beschreiben lassen, nämlich durch diskrete Zufallsgrößen. Er erweitert seine Betrachtungen jedoch sofort auch auf den absolut stetigen Fall; sein Begriff des „Zufallsspiels“ entspricht in der heutigen Terminologie dem Begriff der (diskreten oder absolut stetigen) Zufallsgröße[12]. Die klassische Fehlertheorie ordnet sich als Theorie eines gewissen absolut stetigen Zufallsspiels hier ebenfalls ein; Hausdorff machte sich aber nicht die Mühe, diese offenkundige Tatsache näher auszuführen:

> Die Ausdrücke Fehlerfunction, Fehlergesetz, Präcisionsmaass bedürften im Grunde einer sinngemäßen Anpassung an die Nomenclatur der Zufallsspiele, [. . .][13]

Der Begriff der Zufallsgröße hat sich erst in den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts als zentraler Begriff der Stochastik herauskristallisiert.[14] Um die Jahrhundertwende war von der maßtheoretisch fundierten Definition einer Zufallsgröße natürlich noch nicht die Rede. Zufallsgrößen waren gegeben, wenn ihre Verteilungen gegeben waren: im diskreten Fall eine Folge $\{p_i\}$ mit $p_i \geq 0$ und $\sum_i p_i = 1$; im absolut stetigen Fall eine Verteilungsdichte („Fehlerfunction“) $\varphi(x) \geq 0$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$. In [H 1897a] sind – dem Ziel dieser Arbeit entsprechend – die möglichen Werte der von Hausdorff betrachteten Zufalls-

[11] Außer den mathematischen Aspekten des Versicherungswesens, die Hausdorff unter der Überschrift „Politische Arithmetik“ behandelte, scheint man an der Handelshochschule in Leipzig dem Versicherungswesen keine besondere Beachtung geschenkt zu haben, denn A. Manes schreibt in seinem Bericht *Versicherungs-Wissenschaft auf deutschen Hochschulen*: „Es ist nicht genug zu verwundern, dass die zuerst gegründete deutsche Handelshochschule, nämlich die zu Leipzig, bis heute keine Spezialvorlesung für Versicherungs-Wissenschaft eingerichtet hat, obwohl doch gerade Leipzig eine der ersten deutschen Zentralen des Versicherungswesens ist.“ ([Ma 1903], S. 24.)

[12] Zufallsgrößen werden im folgenden mit großen lateinischen Buchstaben aus dem Ende des Alphabets bezeichnet. Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X wird mit $\mathrm{E}X$, ihre Varianz mit $\mathrm{var}\ X$ und ihre Standardabweichung $\sqrt{\mathrm{var}\ X}$ mit σ_X bezeichnet.

[13] [H 1897a], S. 502.

[14] H. Cramér schreibt in seinen Erinnerungen über Paul Lévys Buch *Calcul des probabilités* ([Le 1925]): „It contained the first systematic exposition of the theory of random variables, their probability distributions and their characteristic functions.“ ([Cr 1976], S. 516).

größen noch Geldbeträge, obwohl diese Beschränkung für HAUSDORFFs Überlegungen ganz unwesentlich ist. Mit beliebigen Zufallsgrößen und der Transformation und analytischen Darstellung von Verteilungen hat sich HAUSDORFF in seiner zweiten wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeit *Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung* ([H 1901a]) beschäftigt.[15] Eine „allgemeine Theorie der Zufallsspiele“ will HAUSDORFF in [H 1897a] nicht geben – eine solche setzt er in Parallele zu GAUSS' *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium* ([Ga 1809]) und weist damit auf die zentrale Bedeutung des Begriffs der Verteilung für eine allgemeine Theorie hin. GAUSS hatte in der *Theoria motus* für die Verteilungsdichte eines zufälligen Fehlers die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

hergeleitet.[16] HAUSDORFF geht es in [H 1897a] um charakteristische Parameter von Verteilungen, und zwar um Maße für die Streuung, die sich finanzmathematisch als Risikomaße interpretieren lassen. Er vergleicht seine diesbezüglichen Betrachtungen mit GAUSS' *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* ([Ga 1832]), in der GAUSS den Begriff des mittleren Fehlers einführt.[17] Ist $\varphi(x)$ die Dichte der Fehlerverteilung mit Erwartungswert 0, so definiert GAUSS die Größe m aus

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, \varphi(x) \, dx$$

als *mittleren Fehler*. Der mittlere Fehler ist also die Standardabweichung einer Zufallsgröße mit Verteilungsdichte $\varphi(x)$, m^2 die Varianz. Als Beispiele für $\varphi(x)$ wählt GAUSS drei Verteilungen, die Gleichverteilung in $[-a, a]$, die Dreiecksverteilung in $[-a, a]$ und die Normalverteilung, und berechnet jeweils den mittleren Fehler. Der zentrale Satz der GAUSSschen Theorie ist der Satz über das additive Verhalten der Varianz bei Addition unabhängiger Zufallsgrößen: Sind V_i unabhängig voneinander beobachtete Größen mit den mittleren Fehlern m_i, so hat $U = \sum \lambda_i \, V_i$ den mittleren Fehler

$$M = \sqrt{\sum \lambda_i^2 \, m_i^2}.$$

Dieses Theorem zeichnet den mittleren Fehler vor allen sonst noch denkbaren Streuungsmaßen aus (GAUSS betonte selbst, daß verschiedene Abweichungsmaße gewählt werden könnten). Dies Theorem wird auch – für beliebige Zufallsspiele formuliert – ein zentraler Satz der HAUSDORFFschen Arbeit sein.

[15] Im Kommentar dazu (dieser Band, S. 556-590) findet sich ein kurzer Abriß der historischen Entwicklung der Begriffe „Zufallsgröße“ und „Verteilung“.

[16] h nannte GAUSS das Präzisionsmaß (s. dieser Band, S. 568); zwischen h und der heute benutzten Standardabweichung σ besteht die Beziehung $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$. Zur historischen Würdigung der GAUSSschen Herleitung s. etwa [Ha 1998], S. 351 ff.

[17] Auszüge aus den beiden genannten GAUSSschen Schriften in deutscher Übersetzung finden sich in [Schn 1989], S. 237–257.

Das Problem, dem sich HAUSDORFF in sehr allgemeiner Weise zu nähern suchte, hatte in der Lebensversicherungsmathematik seit Ende des 18. Jahrhunderts eine Rolle gespielt. Es kann folgendermaßen umrissen werden: Die Berechnung der Nettoprämien einer Versicherung beruht auf dem Äquivalenzprinzip: Im Erwartungswert ist die Summe aller Leistungen des Versicherers gleich der Summe aller Leistungen des Versicherungsnehmers, alles jeweils abgezinst auf den Zeitpunkt des Versicherungsbeginns (daß die wirklich gezahlten Bruttoprämien höher sein müssen, da sie noch zur Deckung der Kosten der Gesellschaft und der Gewinnansprüche der Aktionäre ausreichen sollen, bleibt außer Betracht). In die erwarteten Leistungen gehen – etwa bei einer Lebensversicherung – die aus Sterbetafeln gewonnene Sterbens- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten ein. Sei etwa p_x die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, das nächste Jahr zu überleben, q_x die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr zu sterben, so wird bei l betrachteten x-jährigen die Anzahl der Gestorbenen von der erwarteten Anzahl $q_x l$, die obigem Äquivalenzprinzip zugrunde liegt, i. a. entsprechend einer Binomialverteilung mit den Parametern q_x und l nach oben oder unten abweichen. Die Aufgabe der klassischen Risikotheorie des 19. Jahrhunderts bestand nun darin, das aus diesen möglichen Abweichungen resultierende Risiko für die Versicherungsgesellschaft über den gesamten Verlauf einer Versicherung abzuschätzen und im Idealfall begründete Vorschläge für die Höhe eines „Sicherungsfonds“ zu machen. Dazu heißt es in dem ein Jahr nach HAUSDORFFs Arbeit erschienenen Buch *Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung* ([Wa 1898]), nachdem der Autor KARL WAGNER[18] das Ziel formuliert hat, „den Sicherheitsfonds, diese Schutzmauer gegen Uebersterblichkeit, auf eine feste, d. h. rechnerische Grundlage zu stellen“:

> Unstreitig gehört das geschilderte Problem zu den interessantesten der ganzen Lebensversicherungstechnik und so hat es denn auch seit mehr als hundert Jahren auf die Theoretiker und zwar nicht bloss auf die tüchtigsten Versicherungstechniker, sondern auch auf namhafte Mathematiker und Astronomen, welche dem Versicherungswesen sonst mehr oder weniger ferne standen, vermöge seiner eigenartigen Schwierigkeiten immer wieder eine besondere Anziehungskraft ausgeübt und sie zur Uebung ihres Scharfsinns angereizt.[19]

1885 hatte THEODOR WITTSTEIN in seinem auch von HAUSDORFF gründlich studiertem Buch *Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften sowie aller auf dem Spiele des Zufalls beruhenden Institute* ([Wi 1885]) festgestellt, daß jede Gesellschaft einen Teil ihrer Überschüsse zurückhalte,

> als Sicherungsfonds zur Deckung für künftige nachtheilige Schwankungen des Zufalls [...]; aber über das Maß des Zurückzuhaltenden herrscht bisher vollständiges Dunkel.[20]

---

[18] WAGNER war Vorstand des mathematischen Büros der Lebensversicherungs- und Ersparnis-Bank in Stuttgart.
[19] [Wa 1898], S. 6–7.
[20] [Wi 1885], S. III.

Wittstein hatte seinen Betrachtungen ein Risikomaß zugrundegelegt, welches er mathematisches Risiko nannte und welches seit seiner Einführung durch J. N. Tetens im Jahre 1786 fast ausschließlich benutzt worden war.[21] Hausdorff bezeichnet es als *durchschnittliches Risiko*, eine Benennung, die von allen nachfolgenden Autoren, meist mit Hinweis auf Hausdorffs Arbeit, adoptiert wurde. Wird ein gerechtes Spiel eines Spielers A gegen ein Unternehmen B durch die diskrete Zufallsgröße X mit

$$P(X = x_i) = p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad \mathrm{E}X = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i = 0$$

beschrieben (positive x_i sind die an A zu zahlenden Beträge, negative seine Verluste), so verliert das Unternehmen, wenn $x_i > 0$ ausfällt.

$$D = \sum_{x_i > 0} p_i\, x_i$$

stellt also den Erwartungswert aller möglichen Unternehmensverluste dar; diese Größe ist das durchschnittliche Risiko. Wegen $\mathrm{E}X = 0$ (gerechtes Spiel) ist auch

$$D = -\sum_{x_i < 0} p_i\, x_i$$

(das Risiko des Spielers gegenüber dem Unternehmen). D kann durch das erste absolute Moment der Verteilung ausgedrückt werden: $D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i\,|x_i|$. Hausdorff gibt auch die Formeln für eine stetige Verteilung der Gewinne mit der Dichte $\varphi(x)$ an:

$$D = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x\varphi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{0} x\varphi(x)\, dx.$$

Wittstein gab als erster die folgende Interpretation von D: Da D der Erwartungswert aller möglichen Verluste des Unternehmens ist, stellt D die Prämie dar, die B an ein weiteres Unternehmen B_1 zum Zweck der Rückversicherung gegen Verlust zahlen müßte. Von Wittstein ([Wi 1887]) stammt auch die Idee, diesen Prozeß der Rückversicherung zu iterieren: B_1 erleidet Verlust, wenn $x_i > D$, seine Rückversicherungsprämie an ein Unternehmen B_2 ist

$$D_1 = \sum_{x_i > D} p_i(x_i - D);$$

entsprechend könnte sich B_2 gegen Zahlung von

$$D_2 = \sum_{x_i > D + D_1} p_i(x_i - (D + D_1))$$

[21] [Te 1785/86]. Bei Tetens sind die im folgenden betrachteten x_i die Werte $0, 1, 2, \ldots, n$, denn er berechnet das Risiko einer Gesellschaft, die eine Leibrente 1 je nach Todeszeitpunkt des Versicherten 0 mal, 1 mal, $\ldots n$ mal auszahlen muß. Eine ausführliche Würdigung der Arbeit von Tetens gibt F. Boehm in [Boe 1933–1938], Teil II.

bei einem Unternehmen B_3 rückversichern usw. Entsprechende Überlegungen gelten für stetige Verteilungen. HAUSDORFF erwähnt diesen iterativen Prozeß und berechnet D, D_1, D_2, D_3 für die Normalverteilung, um die Abnahme der durchschnittlichen Risiken bei sukzessiver Rückversicherung zu demonstrieren. Er geht jedoch nicht auf die Frage ein, ob die D_i konvergieren. Mit Verweis auf WITTSTEIN und HAUSDORFF hat G. BOHLMANN 1902 diese Frage aufgegriffen und für den diskreten Fall mit endlich vielen Werten x_i den folgenden Satz bewiesen ([Boh 1902]; D sei gleich D_0 gesetzt):

(1) Die D_i bilden eine monoton abnehmende Folge mit $\lim_{i\to\infty} D_i = 0$,

(2) $\sum_{i=0}^{\infty} D_i$ ist konvergent mit der Summe $\max_i\{x_i\}$.

Durch Normierung auf $D = 1$ kann man die Größen D_i, die HAUSDORFF dann mit δ_i bezeichnet, für die verschiedenen Verteilungen vergleichen. Um die Annäherung der Verteilung einer Summe unabhängiger Zufallsgrößen an die Normalverteilung zu demonstrieren, berechnet HAUSDORFF $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ für die Gleichverteilung, für die Dreiecksverteilung (Verteilung der Summe zweier unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen), vergleicht diese Werte mit denen der Normalverteilung und stellt schon bei der Dreiecksverteilung eine recht gute Approximation der zugehörigen δ_i an die δ_i der Normalverteilung fest.

Das durchschnittliche Risiko zeigt kein überschaubares Verhalten bei der Zusammensetzung unabhängiger Spiele und ist zudem für praktische Rechnungen wenig geeignet; deshalb favorisiert HAUSDORFF das von ihm – in Analogie zu GAUSS' Begriff des mittleren Fehlers – als *mittleres Risiko* bezeichnete Streuungsmaß

$$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i} \qquad (\text{für } \mathrm{E}X = 0)$$

bzw.

$$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i\right)^2} \quad (\text{im allgemeinen Fall}).$$

Analoge Formeln gelten für stetiges X. Das mittlere Risiko M ist die Standardabweichung σ_X der betrachteten Zufallsgröße X, M^2 ihre Varianz.[22] HAUSDORFF bemerkt, daß sich zur Charakterisierung einer Verteilung ihre Momente anbieten[23], wobei man sich praktisch auf die ersten Momente beschränken könne.[24] Die Normalverteilung mit $\mathrm{E}X = 0$ ist durch M vollständig charakterisiert; für diese Verteilung besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen dem durchschnittlichen und dem mittleren Risiko:

$$M = \sqrt{2\pi}\, D. \tag{1}$$

[22] HAUSDORFFs Bezeichnung „mittleres Risiko“ wurde in der versicherungsmathematischen Literatur in der Folgezeit allgemein adoptiert.

[23] In den zwanziger Jahren hat er sich ausführlich mit Momentenproblemen beschäftigt; s. Band IV dieser Edition, S. 193–235, 339–373.

[24] In der Tat genügen für die hauptsächlich verwendeten statistischen Maßzahlen Erwartungswert, Varianz, Schiefe und Exzeß die ersten vier Momente.

HAUSDORFF erwähnt auch die in der statistischen Praxis häufig benutzte „3σ-Regel“:

$$P(-3M \leq X \leq 3M) = 0,9973$$

für normalverteiltes X mit $\mathrm{E}X = 0$. $3M$ kann

> praktisch als äusserste Grenze des zu erwartenden Gewinnes oder Verlustes angesehen werden; [...][25]

Der entscheidende Vorteil der Größe M^2 ist – wie erwähnt, hatte das GAUSS schon bemerkt – ihr additives Verhalten bei der Addition unabhängiger Zufallsgrößen; HAUSDORFF formuliert diesen zentralen Satz folgendermaßen:

> Bei der Zusammensetzung mehrerer unabhängiger Zufallsspiele zu einem Gesammtspiel ist *das Quadrat des Gesammtrisicos gleich der Summe der Quadrate der Einzelrisicen*, wobei unter „Risico“ schlechthin immer das mittlere Risico verstanden sein soll.[26]

Den Begriff der (stochastischen) Unabhängigkeit hat HAUSDORFF ganz besonders hervorgehoben und seinen Lesern nahezubringen gesucht, denn gerade im Umgang mit diesem Begriff hatte er bei mehreren seiner Vorgänger grobe Fehler feststellen müssen. So hatte z. B. WITTSTEIN abhängige Größen wie unabhängige behandelt; damit wurden größere Passagen seiner Ausführungen falsch.[27]

„Um das Entscheidende der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Spiele hervortreten zu lassen“, berechnet HAUSDORFF M^2 für ein Spiel, welches sich aus zwei abhängigen Spielen zusammensetzt. Die Rechnung wirkt für einen heutigen Leser etwas umständlich, weil HAUSDORFF den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit nur implizit benutzt. Er erkannte jedoch sehr bald die fundamentale Bedeutung dieses Begriffes und widmete seiner Klärung den ersten Teil seiner wahrscheinlichkeitstheoretischen Abhandlung [H 1901a].[28] Sein Beispiel läßt sich dann einfacher so beschreiben: Die Zufallsgröße X sei der Preis des kombinierten Spiels; es ist $X = A + A'$, falls EE' eintritt, $X = A$, $X = A'$, $X = 0$, falls $E\overline{E'}$, $\overline{E}E'$, $\overline{E}\,\overline{E'}$ eintritt. Mit $P(E) = p$, $P(\overline{E}) = 1 - p =: q$, $P(E') = p'$, $P(\overline{E'}) = 1 - p' =: q'$, $P(E'|E) = \pi$, $P(E'|\overline{E}) = \kappa$ gilt

$$\begin{array}{rclcl} P(EE') & = & P(E)P(E'|E) & = & p\pi \\ P(E\overline{E'}) & = & P(E)P(\overline{E'}|E) & = & p(1-\pi) \\ P(\overline{E}E') & = & P(\overline{E})P(E'|\overline{E} & = & q\kappa \end{array}$$

$$p' = P(E') = P(E'E) + P(E'\overline{E}) = p\pi + q\kappa.$$

---

[25] [H 1897a], S. 506.

[26] [H 1897a], S. 507.

[27] HAUSDORFF setzt sich in [H 1897a], S. 517, damit kurz auseinander; eine eingehende Kritik findet man in [Boe 1933–1938], Teil III, S. 768 ff. BOEHM bemerkt auch, daß es HAUSDORFF war, der WITTSTEINs Fehler als erster bemerkte.

[28] Dies ermöglichte ihm auch, die Unabhängigkeit von Ereignissen ohne Rückgriff auf eine außermathematische inhaltliche Begründung zu definieren; s. diesen Band, S. 529–549 und 562–567.

Für den Einsatz EX und das Quadrat des mittleren Risikos erhält man

$$\mathrm{E}X = (A + A')p\pi + Ap(1-\pi) + A'q\kappa = Ap + A'p'.$$

$$\begin{aligned} M^2 = \ & \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = (A+A')^2 p\pi + A^2 p(1-\pi) + A'^2 q\kappa - (Ap + A'p')^2 \\ & = pqA^2 + p'q'A'^2 + 2AA'pq(\pi - \kappa). \end{aligned}$$

Der gemischte Term verschwindet genau dann, wenn $\kappa = \pi$, d.h. $P(E'|E) = P(E'|\overline{E})$, also genau dann, wenn E und E' unabhängig sind.

Das mittlere Risiko ist bereits 1859 von einem Astronomen, Carl Bremiker, in die Versicherungsmathematik eingeführt und auf verschiedene Versicherungsarten angewandt worden.[29] Sein Ansatz wurde jedoch vor Hausdorff so gut wie nicht beachtet. Dazu schreibt G. Bohlmann in seinem Artikel *Lebensversicherungs-Mathematik* in der *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* im Hinblick auf [Bre 1859]:

> Seine Arbeit ist jedoch nicht verstanden, vielmehr bis in die jüngste Zeit die selbständige Bedeutung des mittleren Risikos in der Lebensversicherung verkannt worden. Eine Ausnahme in letzterer Hinsicht bildet die in Fussn. 144 citirte Arbeit von *Hausdorff* [[H 1897a] – W. P.], der auch die unterscheidende Benennung „durchschnittliches" und „mittleres" Risiko entnommen ist, und der Aufsatz von *Gram*.[30]

Nun standen natürlich auch die Versicherungsmathematiker, die wie z. B. Wittstein mit dem durchschnittlichen Risiko arbeiteten, vor der Aufgabe, das Risiko einer zusammengesetzten Gesamtheit aus den Einzelrisiken der Beteiligten zu berechnen. Zu diesem Zweck nahmen sie an, daß die Abweichungen von 0 (Gewinne oder Verluste) der Gesamtheit – analog zur Zusammensetzung eines Gesamtfehlers aus unabhängig voneinander wirkenden Elementarfehlern – normalverteilt sind. Dann kann das zur Gesamtheit gehörige D nach Formel (1) aus M bestimmt werden; M ist dann gewissermaßen eine Hilfsgröße, ihr Quadrat wird nach dem zitierten Satz aus den Quadraten der Einzelrisiken bestimmt. So war bereits Karl Hattendorff in [Hat 1868] vorgegangen; seine Arbeit war wegen des darin erstmals formulierten „Hattendorffschen Theorems" von außerordentlichem Einfluß. Hattendorff berechnet einen Näherungsausdruck für das jährliche durchschnittliche Risiko einer reinen Todesfallversicherung und behauptet, daß sich das durchschnittliche Risiko über die gesamte Laufzeit der Versicherung als Wurzel aus der Quadratsumme der jährlichen Risiken ergibt. Wegen der bei einer großen Anzahl von Versicherten

---

[29] [Bre 1859]. Eine eingehende Würdigung von Bremikers Schrift gibt Boehm in [Boe 1933–1938], Teil II, S. 322–326.

[30] [Boh 1901], S. 905–906. Ob Hausdorff Bremikers Schrift gelesen hat, ist fraglich; zitiert hat er sie jedenfalls nicht. Er kannte jedoch die Arbeit von Zech ([Z 1861]), mit der er sich S. 546–547 kritisch auseinandersetzt, und Zech hat auf Bremiker verwiesen. Mit dem Aufsatz von Gram ist [Gr 1888] gemeint. Diese auf dänisch verfaßte Arbeit wird Hausdorff wohl kaum gelesen haben. Allerdings ist die Besprechung im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Jahrgang 1888, Berlin 1891, 232–233, ausführlich genug, um den Grundgedanken zu erkennen.

angenommenen Normalverteilung und damit der Proportionalität von durchschnittlichem und mittlerem Risiko gemäß (1) war dies auch ein Satz über das mittlere Risiko: Das Quadrat des mittleren Risikos für die gesamte Versicherungsdauer ist gleich der Summe der Quadrate der mittleren Risiken der einzelnen Jahre. In dieser Form ist der Satz später unter der Bezeichnung „HATTENDORFFsches Theorem“ in die Literatur eingegangen.[31] HATTENDORFFs „Beweis“ argumentiert – modern gesprochen – mit der Additivität der Varianzen bei Unabhängigkeit; dieses Argument ist hier jedoch vom Grundsatz her verfehlt, weil die betrachteten Ereignisse nicht unabhängig sind (zu HAUSDORFFs Beitrag zu einem korrekten Beweis des HATTENDORFFschen Theorems s. u., Abschnitt 3).

Das Vorgehen, D als das eigentliche Risikomaß und M nur als Hilfsgröße aufzufassen, setzt die Anwendbarkeit des zentralen Grenzwertsatzes voraus. G. BOHLMANN geht in seinem Enzyklopädiebericht ([Boh 1901]) auf den zentralen Grenzwertsatz als „ein Fundamentaltheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ relativ ausführlich ein und kommentiert dessen oben beschriebene Anwendung in der Risikotheorie – etwa bei HATTENDORFF und WITTSTEIN – folgendermaßen:

> In der Versicherungslitteratur ist der fragliche Satz vielfach, aber immer nur rein formal behandelt worden, ohne dass man sich um irgend welche Konvergenzbetrachtungen Sorge gemacht hat, die doch die einzige und sehr ernstliche Schwierigkeit bilden. [S. dazu insbesondere [Cr 1923] – W. P.] Die Theorie des Risikos erleidet hierdurch keine Einbusse, wenn man nur mit *Bremiker, Gram* und *Hausdorff* das mittlere und nicht, wie es die Versicherungsmathematiker seit *Kanner* (1867) fast durchgängig thun, das durchschnittliche Risiko des Versicherungsbestandes als Basis wählt.[32]

HAUSDORFF diskutiert auf den Seiten 516–517 das Verhältnis von M und D und verteidigt seine Wahl von M als Risikomaß. Er kritisiert in diesem Zusammenhang auch fragwürdige Ansichten über einen einzurichtenden Sicherungsfonds. Für einen Sicherungsfonds kommt es auf die Bestimmung einer Verlustgrenze g_α an mit $P(X - \mathrm{E}X \geq g_\alpha) \leq \alpha$ (α hinreichend klein). Für die Normalverteilung ergibt $\alpha = 0,05$ den Wert $g_\alpha = 1,6\,M$; ein Sicherungsfond von $1,6\,M$ würde also mit Wahrscheinlichkeit 0,95 ausreichen. Die Wahl von α hängt von der Risikobereitschaft des Unternehmers ab.[33]

3. Anwendungen

Eine erste interessante Anwendung beruht auf dem Begriff des relativen Ri-

[31] Der Satz von HATTENDORFF beruht darauf, daß die Verluste des Versicherers in den einzelnen Jahren paarweise unkollerierte Zufallsgrößen sind. Für solche Zufallsgrößen ist, auch wenn sie nicht unabhängig sind, die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen.

[32] [Boh 1901], S. 913.

[33] Die praktischen Probleme, die mit der Bildung von Sicherungsfonds zusammenhängen, sind jedoch ungleich komplizierter; s. Abschnitt 5.

sikos. WITTSTEIN und andere Autoren[34] hatten schon einen relativen Risikobegriff gebildet, indem sie das durchschnittliche Risiko auf den Einsatz bzw. die Versicherungssumme bezogen.[35]

Ist X eine Zufallsgröße mit $\mathrm{E}X > 0$, so heißt $\frac{\sigma_X}{\mathrm{E}X}$ der Variationskoeffizient von X.[36] Betrachtet man k unabhängige, identisch wie X verteilte Zufallsgrößen X_j, so hat $Z = \sum_{j=1}^{k} X_j$ den Variationskoeffizienten

$$\frac{\sigma_Z}{\mathrm{E}Z} = \frac{\sqrt{k}\sigma_X}{k\,\mathrm{E}X} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\sigma_X}{\mathrm{E}X}. \tag{2}$$

Beschreibt nun Y ein Zufallsspiel, in welchem die Preise A_i mit den Wahrscheinlichkeiten p_i gezahlt werden, so beträgt der „gerechte“ Einsatz $E = \sum_{i=1}^{n} p_i A_i$. Den Variationskoeffizienten von Y nennt HAUSDORFF das *relative Risiko* des Spieles Y (bzw. eines Spieles X mit $x_i = A_i - E_i,\ E = \sum_{i=1}^{n} p_i E_i,\ \mathrm{E}X = 0$). HAUSDORFF bemerkt treffend, daß die Gleichung (2) „im Keim den ganzen Versicherungsgedanken“ enthält: Das relative Risiko des Unternehmens wird mit wachsender Zahl k von Teilnehmern geringer, und zwar nimmt es mit der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ab.

Ist nun Y ein fest vorgegebenes Spiel (z.B. ein fester Versicherungsmodus) mit auf 1 normiertem Einsatz; $\sigma_Y =: m$ sein mittleres Risiko. Eine Gesamtheit von k unabhängigen Spielern mit Einsätzen s_j $(j = 1, \ldots, k)$ wird durch die Zufallsgröße $Z = \sum_{j=1}^{k} s_j Y_j$ repräsentiert, wobei die Y_j unabhängige, identisch wie Y verteilte Zufallsgrößen sind. Eine zu dieser Gesamtheit neu hinzukommende, von der ersten unabhängige Gesamtheit von k' unabhängigen Spielern mit den Einsätzen s'_l $(l = 1, \ldots, k')$ wird analog durch $Z' = \sum_{l=1}^{k'} s'_l Y_l$ repräsentiert, wobei Z, Z' unabhängig sind. HAUSDORFF fragt nun nach Bedingungen dafür, daß das relative Risiko durch die Gesamtheit der hinzukommenden Spieler nicht vergrößert wird, d.h. es soll

$$\frac{\sigma_{Z+Z'}}{\mathrm{E}(Z+Z')} \le \frac{\sigma_Z}{\mathrm{E}Z},\ \text{d.h. } m\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} s_j^2 + \sum_{l=1}^{k'} s_l'^2}}{\sum_{j=1}^{k} s_j + \sum_{l=1}^{k'} s'_l} \le m\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} s_j^2}}{\sum_{j=1}^{k} s_j}$$

sein; nach Einführung der Mittelwerte

$$s = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j, \quad t^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} s_j^2, \quad s' = \frac{1}{k'}\sum_{l=1}^{k'} s'_l, \quad t'^2 = \frac{1}{k'}\sum_{l=1}^{k'} s_l'^2$$

führt das auf HAUSDORFFs Ungleichung

$$k'\frac{s'}{s} \ge k\left(\frac{st'^2}{s't^2} - 2\right)$$

[34] Z. B. LANDRÉ in [La 1895].

[35] In der 5. Auflage von [La 1895] (1921) bemerkt LANDRÉ: „Dr. F. HAUSDORFF ist mir in dem Begriff des relativen Risikos gefolgt […]“ ([La 1921], S. 447.

[36] Der Variationskoeffizient wurde 1895 von K. PEARSON eingeführt, um die Variabilität von Verteilungen vergleichen zu können.

mit den entsprechenden interessanten Folgerungen für die Mindestanzahl k' der neu hinzugekommenen Spieler (S. 511).[37]

Hausdorffs Anwendungen des Begriffs des mittleren Risikos auf Lotterien und Anleihen haben in der späteren Rezeption keine Rolle gespielt, weil die praktische Bedeutung des Risikobegriffs auf diesen Gebieten sehr begrenzt ist. Bemerkenswert ist hier, in welch allgemeiner Weise er Klassenlotterien und gewisse Typen von Anleihen durch geeignete Zufallsgrößen modelliert.

Ein Lotterieunternehmen gibt bei s emitierten Losen Gewinne $A_1, A_2, \ldots, A_s$ vor (die meisten der $A_i = 0$), der Spieler seinerseits gibt Losbesetzungen θ_i mit $0 \leq \theta_i \leq 1$ vor (bei den heutigen Klassenlotterien sind $\theta_i = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ möglich; $\theta_i = 0$ bedeutet, daß das Los i nicht gespielt wird). $A = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} A_i$ ist der durchschnittliche Gewinn pro Los, $A\sum_{i=1}^{s}\theta_i$ ist somit der „gerechte“ Einsatz des Spielers. Bei einer Ziehung werden die Gewinne A_i in zufälliger Weise den Nummern $1, 2, \ldots, s$ zugeordnet; eine Ziehung kann also durch eine Permutation $(h_1, h_2, \ldots, h_s) \in \mathfrak{S}_s$ beschrieben werden. Der zugehörige Gewinn beträgt

$$\sum_{i=1}^{s} A_{h_i}\theta_i.$$

Das Lotteriespiel wird also durch eine Zufallsgröße X beschrieben, welche die $s!$ Werte

$$x_\pi = \sum_{i=1}^{s}(A_{h_i} - A)\theta_i, \qquad \pi = (h_1, h_2, \ldots, h_s) \in \mathfrak{S}_s$$

mit den Wahrscheinlichkeiten $p_\pi = \frac{1}{s!}$ annimmt. Wegen $\mathrm{E}X = 0$ ist

$$\sigma_X^2 = M^2 = \frac{1}{s!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_s} x_\pi^2.$$

Hausdorffs nicht ganz einfache Rechnung[38] liefert schließlich, wenn man noch die Mittelwerte

$$B^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} A_i^2, \quad \theta = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\theta_i, \quad \eta^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2$$

einführt,

$$M^2 = \frac{s^2}{s-1}(B^2 - A^2)(\eta^2 - \theta^2). \tag{3}$$

Die aus (3) gezogene Folgerung, daß das Risiko geringer wird, wenn man z.B. statt eines ganzen Loses 8 Achtellose kauft, hat für einen einzelnen Spieler

[37] Den Zusammenhang dieser ganz allgemeinen Betrachtung Hausdorffs mit dem Problem der Stabilität einer Versicherungsgesellschaft stellt Bohlmann in seinem Enzyklopädiebericht her: „Der Landré'schen Bedingung verwandt ist diejenige von *F. Hausdorff*, a. a. O. p. 511.“ ([Boh 1901], S. 917.)

[38] In diesem Fall das durchschnittliche Risiko zu berechnen, dürfte kaum gelingen.

praktisch wenig Bedeutung, da mit dem Risiko auch die im Falle eines Hauptgewinnes zu erwartende Gewinnsumme abnimmt und die meisten Menschen in der Lotterie spielen mit der Hoffnung auf eine große Summe und weniger, um mäßige Summen (wenn auch mit größerer Wahrscheinlichkeit) zu gewinnen. (3) kann aber auch als Unternehmensrisiko gegenüber der Gesamtheit der Spieler betrachtet werden; es verschwindet, wenn alle Lose restlos verkauft bzw. gleich besetzt sind ($\theta_i = 1$ bzw. $\theta_i = \theta$ für $i = 1, 2, \ldots, s$). Das Unternehmen wird sich also bemühen, die Bestellungen etwa über die Achtellose möglichst auf viele Nummern zu verteilen und sie nicht zu jeweils acht zu einem ganzen Los zusammenzusetzen und dafür vielleicht gewisse Nummern ganz unbesetzt zu lassen. Allerdings ist diese Strategie nur begrenzt durchzuführen, denn der Verkauf findet in gewissen Zeiträumen statt und man muß für später bestellende Kunden, die ganze Lose wünschen, solche bereithalten. Für σ voll besetzte Nummern und $s - \sigma$ unverkaufte Lose folgt aus (3) für das Unternehmensrisiko

$$M_\sigma = \sqrt{\frac{\sigma(s-\sigma)}{s-1}(B^2 - A^2)}.$$

Im Abschnitt über Anleihen gibt Hausdorff zunächst einen gedrängten Abriß der Tilgungsrechnung, wobei er die Formeln so allgemein entwickelt, daß sich die wichtigsten Fälle der Praxis, die Ratentilgung (Plan gleicher Tilgungen), die Annuitätentilgung (Plan gleicher Zahlungen) und auch der Fall aufgeschobener Tilgung sofort als Spezialfälle ergeben. Die grundlegende Formel gibt den Barwert (Gegenwartswert) P von nach $1, 2, \ldots, n$ Jahren fälligen Zahlungen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ an:

$$P = \sum_{i=1}^{n} z_i \rho^i. \tag{4}$$

Dabei ist $\rho = r^{-1}$ der Diskontierungsfaktor (Abzinsungsfaktor), $r = 1 + \frac{p}{100}$ (p der Zinssatz in %) der Aufzinsungsfaktor. In der Tilgungsrechnung setzen sich die Zahlungen z_i aus einem Tilgungsanteil t_i und einem Zinsanteil v_i zusammen; es gilt

$$z_i = t_i + v_i, \quad \sum_{i=1}^{n} t_i = P, \quad v_1 = \frac{p}{100}P, \quad v_i = \frac{p}{100}\left(P - \sum_{j=1}^{i-1} t_j\right) \text{ für } i \geq 2. \tag{5}$$

Der Zufall und damit der Begriff des Risikos im Hausdorffschen Sinne spielt nur bei solchen Anleihen eine Rolle, deren Tilgung mittels Auslosung erfolgt. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß der Gläubiger einen Anteilsschein zum Nominalwert 100 besitzt. Die Anleihe hat einen (im allgemeinen vom Marktzinssatz p abweichenden) nominellen Zinssatz q. Der Gläubiger erhält zu gewissen Zeitpunkten gegen Einlösung jeweils eines Kupons die fälligen Zinsen, also bei jährlicher Zinszahlung jeweils q Geldeinheiten. Die Tilgung erfolgt so, daß der Emittent nach $1, 2, \ldots, n$ Jahren jeweils eine Quote von $p_1 Q, p_2 Q, \ldots, p_n Q$ von Anteilsscheinen auslost und für die ausgelosten Scheine den Nominalwert zurückzahlt (Q ist der Nominalwert der gesamten Anleihe, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). p_i ist für den Gläubiger die Wahrscheinlichkeit, daß sein Anteilsschein nach i Jahren zur Rückzahlung gelangt. Der Barwert eines nach i Jahren ausgelosten Anteilsscheins ist also

$$A_i = q(\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^i) + 100\rho^i = 100\frac{q}{p} + 100\left(1 - \frac{q}{p}\right)\rho^i.$$

Die A_i kann man als Preise eines Zufallsspiels deuten, welche mit den Wahrscheinlichkeiten p_i gezahlt werden.[39] Um den „gerechten" Einsatz zu berechnen, muß der Kurs der Anleihe bestimmt werden, das ist das Verhältnis ihres Barwertes (Realwertes) P zum Nominalwert Q:

$$C = \frac{P}{Q} \cdot 100 \qquad \text{(ausgedrückt in \%).} \tag{6}$$

Auch für die Kursberechnung gibt Hausdorff ein allgemeines Schema, welches die verschiedensten Tilgungsarten umfaßt. Eine Anleihe zum Nominalwert Q und mit Nominalzinssatz q werde nach $1, 2, \ldots, n$ Jahren durch die Zahlungen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ getilgt. Ist p der Marktzinssatz, so bestimmt sich der Barwert P dieser Zahlungen aus (4). Andererseit ergeben sich aus den Formeln (5) der Tilgungsrechnung die z_i; setzt man diese z_i in (4) ein und führt noch die Quoten $\frac{t_i}{Q} = p_i$ ($\sum p_i = 1$) ein, so erhält man aus (6) für den Kurs

$$C = 100\frac{q}{p} + 100\left(1 - \frac{q}{p}\right)\sum_{i=1}^{n} p_i\rho^i.$$

Für den Gläubiger wird also die Anleihe durch eine Zufallsgröße X beschrieben, welche die Werte $A_i - C$ mit den Wahrscheinlichkeiten p_i annimmt; es ist $\mathrm{E}X = 0$ und das Quadrat des mittleren Risikos ist

$$\operatorname{var} X = \sum_{i=1}^{n}(A_i - C)^2 p_i = 100^2\left(1 - \frac{q}{p}\right)^2\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\rho^{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\rho^i\right)^2\right].$$

Diese Risikogröße ist für das Anleihengeschäft selbst kaum von Bedeutung. Man kann sie jedoch auf den praktisch wichtigeren Fall der Lebensversicherung übertragen, indem man die Kuponerlöse als Rente, die Tilgung der Anleihe als Todesfallsumme interpretiert. Die Quoten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sind dann Sterbenswahrscheinlichkeiten. Hausdorff zieht es jedoch vor, ein sehr allgemeines Versicherungsmodell durch geeignete Zufallsgrößen direkt zu beschreiben.

Als Vorbereitung hat er im § 2, S. 512–515, eine Formel für die Varianz bzw. bedingte Varianz einer diskreten Zufallsgröße X mit $\mathrm{E}X = 0$ angegeben, die in Anwendung auf die Lebensversicherung direkt auf das berühmte

[39] Unter dieses Schema fallen auch die Prämienanleihen, die sich von der eben beschriebenen Art nur dadurch unterscheiden, daß auf den ausgelosten Anteilsschein nicht der Nominalwert, sondern ein davon verschiedener Wert (Prämie) gezahlt wird.

HATTENDORFFsche Theorem führt. Die einschlägige Arbeit von HATTENDORFF ([Hat 1868]) scheint er nicht gekannt zu haben; jedenfalls erwähnt er sie nirgends.[40] Da HATTENDORFFs Theorem zwar richtig ist, sein Beweis jedoch – wie bereits erwähnt – falsch war, kann HAUSDORFFs Betrachtung (mit einer gewissen Einschränkung, s. u.) als erster korrekter Beweis des HATTENDORFFschen Theorems betrachtet werden.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsgröße mit $X = x_i$ auf E_i, $P(E_i) = p_i$ und $\mathrm{E}X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0$. Sei

$$F_m = \overline{E_1 \cup \cdots \cup E_m}$$

und

$$v_m = \mathrm{E}(X|F_m) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(E_i|F_m).$$

Wegen $E_i \cap F_m = \emptyset$ für $i \leq m$ und $E_i \cap F_m = E_i$ für $i = m+1, \ldots, n$ gilt

$$v_m = \sum_{i=m+1}^{n} q_i x_i \quad \text{mit} \quad q_i = \frac{P(E_i)}{P(F_m)} = \frac{p_i}{1 - \sum_{j=1}^{m} p_j}\,,$$

also

$$v_m = \frac{\sum_{i=m+1}^{n} p_i x_i}{1 - \sum_{j=1}^{m} p_j} = -\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i x_i}{1 - \sum_{j=1}^{m} p_j}\,.$$

Durch einfache Rechnungen erhält man folgende Rekursionsformel für v_m:

$$q_{m+1}(x_{m+1} - v_m) + (1 - q_{m+1})(v_{m+1} - v_m) = 0\,.$$

Diese läßt sich so deuten: Die Zufallsgröße Y_m, welche die Werte $x_{m+1} - v_m$ bzw. $v_{m+1} - v_m$ mit den Wahrscheinlichkeiten q_{m+1} bzw. $1 - q_{m+1}$ annimmt, hat den Erwartungswert 0. Es ist

$$\mathrm{var} Y_m =: \left(M_m^{m+1}\right)^2 = (x_m - v_m)^2 \frac{q_{m+1}}{1 - q_{m+1}} = (v_{m+1} - v_m)^2 \frac{1 - q_{m+1}}{q_{m+1}}\,.$$

Das zentrale Ergebnis dieser Betrachtung ist HAUSDORFFs Formel (18), welche

$$\mathrm{var}(X|F_m) =: M_m^2 = \sum_{j=m+1}^{n} x_j^2 q_j - \left(\sum_{j=m+1}^{n} x_j q_j\right)^2 = \sum_{j=m+1}^{n} x_j^2 q_j - v_m^2$$

[40] Darauf deuten auch die drei Hefte mit Ausarbeitungen zur Versicherungs- und Finanzmathematik und zur Statistik hin, die sich in HAUSDORFFs Nachlaß befinden (Kapsel 49 : Fasz. 1075). Diese Hefte sind vermutlich um 1896/97 in Vorbereitung seiner Vorlesungen entstanden. Dort finden sich Ausarbeitungen, die an Werke von FECHNER, SCHEFFLER, WITTSTEIN, ZECH, ZEUNER und ZILLMER anschließen. HATTENDORFF kommt nicht vor.

additiv durch die $\left(M_j^{j+1}\right)^2$ ausdrückt:

$$\left(1-\sum_{i=1}^{m} p_i\right) M_m^2 = \sum_{j=m}^{n}\left(1-\sum_{i=1}^{j} p_i\right)\left(M_j^{j+1}\right)^2 .$$

Insbesondere ergibt sich für $m=0$ wegen $F_0=\Omega$

$$\operatorname{var} X = M^2 = M_0^2 = \sum_{j=0}^{n}\left(1-\sum_{i=1}^{j} p_i\right)\left(M_j^{j+1}\right)^2 .$$

Diese Formeln hat HAUSDORFF nicht bewiesen; er bemerkt nur, daß sie „leicht beweisbar" seien. Die Behauptungen folgen aus einem allgemeinen Theorem von T. N. THIELE ([Ti 1897], S. 125; englische Übersetzung [Ti 1903]), das HAUSDORFF zum Zeitpunkt der Abfassung seiner Arbeit sicher nicht bekannt war. Einen elementaren Beweis gab BOEHM 1935 ([Boe 1933–1938], Teil III, S. 925–928); BOEHM weist auch auf den unmittelbaren Zusammenhang zum HATTENDORFFschen Satz hin:

> Da Hausdorff den entsprechenden Satz der allgemeinen Theorie des mittleren Risikos, den ich den „Hausdorffschen" Satz nennen möchte, nur als eine „leicht beweisbare" Formel anführt, möge im folgenden schon wegen der prinzipiellen Bedeutung desselben ein exakter Beweis davon wirklich auch durchgeführt werden, zumal zu vermuten ist, daß die meisten Autoren, welche die Abhandlung H.s zitieren, über diese Bemerkungen hinweggelesen haben. Man kann nämlich zu Recht schon Hausdorff – und nicht erst Küttner oder noch spätere Autoren – das Verdienst: den Hattendorffschen Satz als erster einwandfrei bewiesen zu haben, zuschreiben, wenn er auch den Beweis seines viel allgemeineren „Hausdorffschen" Satzes nicht wiedergibt.[41]

Die Verbindung zur Lebensversicherung ergibt sich folgendermaßen: Ein x-jähriger schließe eine Lebensversicherung ab, welche HAUSDORFF sehr allgemein ansetzt als Kombination einer n-jährigen vorschüssigen Leibrente q mit einer gemischten Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall ($(n-1)$-jährige Todesfallversicherung und n-jährige Erlebensfallversicherung, jeweils mit der Leistung Q). Die Prämie C sei einmalig am Beginn bezahlt (der Fall jährlicher Zahlungen erfordert nur einfache Modifikationen). E_i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ sei das Ereignis, daß der Versicherte im Jahr i nach Abschluß stirbt, E_n das Ereignis, daß er das Jahr n erlebt. Die Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(E_i)$ bzw. die bedingten Wahrscheinlichkeiten $q_i = P(E_i|F_m)$ aus dem oben betrachteten allgemeinen Modell bezeichnet HAUSDORFF jetzt mit π_i bzw. κ_i, um Verwechslungen mit damals bereits allgemein eingeführten Symbolen der Versicherungsmathematik zu vermeiden. Die π_i ergeben sich mittels der HAUSDORFFschen Formeln

[41] [Boe 1933–1938], Teil III, S. 921.

(51) unmittelbar aus der Sterbetafel.[42] Um die Leistungen des Versicherers und die Prämien anzugeben, werden in üblicher Weise die Kommutationszahlen eingeführt (diskontierte Zahl der Lebenden und Toten und deren Summen; ρ ist der Diskontsatz); für die Berechnung des mittleren Risikos benötigt man eine zweite Serie solcher Zahlen, die mit dem Diskontsatz ρ^2 diskontiert sind (die gestrichenen Größen bei HAUSDORFF).[43]

Bezeichnet die Zufallsgröße X den Verlust des Versicherers (Summe aller Leistungen - Summe aller Prämien, jeweils diskontiert auf den Anfang der Versicherung), so fordert das Äquivalenzprinzip gerade $\mathrm{E}X = 0$. Tritt das Ereignis E_i ein, so zahlt der Versicherer

$$A_i = q\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + Q\rho^i = \frac{q}{1-\rho} + \left(Q - \frac{q}{1-\rho}\right)\rho^i\,,$$

X nimmt also die Werte $A_i - C$ mit den Wahrscheinlichkeiten π_i an. Aus $\mathrm{E}X = 0$ folgt

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i \pi_i\,.$$

Für das mittlere Risiko $\mathrm{var}X = M^2$ ergibt sich dann unmittelbar der Ausdruck (55).

Die Prämie C kann noch in die Prämie für die Leibrente und die für die gemischte Kapitalversicherung zerlegt werden; dabei sind ${}_nR_x$ und ${}_n\mathfrak{P}_x$ die entsprechenden Prämien zur Leistung 1. Schließlich wird noch die Jahresprämie $Q\,{}_n\mathfrak{p}_x$ für die gemischte Kapitalversicherung berechnet; alle diese Prämien ergeben sich in bekannter Weise aus den Kommutationszahlen gemäß den Formeln (58). Durch Spezialisierung erhält HAUSDORFF die folgenden temporären Versicherungen mit Laufzeit n:
α) gemischte Kapitalversicherung mit einmaliger Prämienzahlung,
β) Leibrente mit einmaliger Prämienzahlung,
γ) gemischte Kapitalversicherung mit jährlicher vorschüssiger Prämienzahlung.
Für diese drei Versicherungen können nun durch Spezialisierung der Formel (55) die mittleren Risiken unmittelbar angegeben und verglichen werden.

Für $n \to \infty$ (gemeint ist die Summation bis zum Ende der Sterbetafel) gehen die temporären in die entsprechenden lebenslänglichen Versicherungen über. Für diese berechnet HAUSDORFF die von ihm als „Fortsetzungsrisiken" bezeichneten bedingten Varianzen M_m^2 gemäß der im § 2 hergeleiteten allgemeinen

[42] Mit den heute üblichen Bezeichnungen gilt

$$\pi_k = q_{x+k-1} \cdot {}_{k-1}p_x\,,\quad k = 1, 2, \ldots, n-1;\quad \pi_n = {}_{n-1}p_x\,,$$

$$\kappa_j = \frac{\pi_j}{1 - \sum_{i=1}^{m} \pi_i} = \frac{\pi_j}{{}_mp_x}\,,\quad j = m+1, \ldots, n.$$

[43] Tafeln für diese Zahlen hat erstmals J. H. PEEK in seiner Dissertation berechnet. PEEK kannte HAUSDORFFs Arbeit und schätzte sie besonders hoch, s. Fußnote 46.

Formel (S. 515), welche für den jetzt vorliegenden Fall ($x_i = A_i - C,\ q_i = \kappa_i$)

$$M_m^2 = \left(Q - \frac{q}{1-\rho}\right)^2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{m+j}\rho^{2j} - \left(\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_{m+j}\rho^{j}\right)^2\right]$$

ergibt. Die sich daraus für die speziellen Fälle α), β), γ), ergebenden Formeln (69) und (70) waren die für die Versicherungsmathematik wesentlichsten Resultate von Hausdorffs allgemeinen Betrachtungen über das Risiko bei Zufallsspielen. Schon Wittstein hatte versucht, die Risiken der drei Versicherungen α), β) und γ) ab einem gewissen Zeitpunkt m bis zu ihrem Ende zu berechnen ([Wi 1885], S. 77), war aber zu falschen Ergebnissen gelangt. „Eine einwandsfreie Darstellung giebt *Hausdorff*, a. a. O. p. 536–540“, stellte Bohlmann 1901 fest ([Boh 1901], S. 908). Die Formeln (69) und (70) wurden in der Folgezeit von mehreren Autoren als die „Hausdorffschen Formeln“ oder die „Hausdorffschen Beziehungen“ bezeichnet, z. B. von Alfred Berger in seinem bekannten Lehrbuch (s. u., Abschnitt 4).

Schließlich betrachtet Hausdorff noch zusätzlich die Möglichkeit, aus dem Vertrag auszutreten und sich das bis dahin angesammelte Deckungskapital auszahlen zu lassen. Für diesen Fall berechnet er auch die jährlichen Risiken $(M_m^{m+1})^2$ und verweist auf seine Formel (18), durch welche man – wie bereits erwähnt – unmittelbar auf das Hattendorffsche Theorem geführt wird. Auf Einzelheiten sei hier verzichtet, weil Boehm diesen Teil von Hausdorffs Artikel besonders ausführlich mittels der gängigen versicherungsmathematischen Notation dargestellt hat ([Boe 1933–1938], Teil III, S. 931–935). Boehm motiviert dies folgendermaßen:

> Da diese Betrachtungen [$\cdots$] gegenüber den vorhergehenden Abschnitten [d. h. gegenüber den übrigen von Boehm besprochenen Autoren – W. P.] etwas völlig Neues darstellen, sei etwas genauer auf sie eingegangen.[44]

Wie die früher eingeführte „reine Reserve“ v_m mit dem Deckungskapital zusammenhängt, zeigt Hausdorff schließlich in einer ergänzenden Bemerkung (S. 544).

4. Zur Rezeption von Hausdorffs Arbeit

Die Versicherungswissenschaftler hatten für ihre Publikationen im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts bereits eine Reihe von eigenen Periodika (z. B. *Masius' Rundschau der Versicherungen, Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch, Journal des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft, Vereinsblatt für deutsches Versicherungswesen*) sowie Periodika angrenzender Gebiete (*Zeitschrift*

[44] [Boe 1933–1938], Teil III, S. 931. Auch Bohlmann weist in seinem Enzyklopädiebericht auf diesen Teil der Hausdorffschen Untersuchung besonders hin: „Den Einfluss des Aufgebens einer Police auf das Risiko untersucht *F. Hausdorff*, Leipz. Ber. 1897, p. 540.“ ([Boh 1901], S. 893).

des Königl.-Preussischen statistischen Büros, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik) zur Verfügung. Auch die „Versicherungstechniker" (Versicherungsmathematiker) haben hauptsächlich in diesen Organen publiziert. Eine einschlägige Arbeit in den Leipziger Akademieberichten hätte so leicht übersehen werden können. Daß dies nicht geschah, mag damit zusammenhängen, daß Hausdorffs Arbeit bereits ein Jahr nach ihrem Erscheinen in einem einschlägigen und weit verbreiteten Buch ([Wa 1898]) ziemlich ausführlich besprochen wurde; Wagner resümiert dort die Arbeiten von 15 Autoren, die sich seit Tetens mit dem Risiko beschäftigt haben. Hausdorffs Artikel sind die Seiten 71–77 gewidmet. Wagner referiert ohne zu werten; allerdings konnte er der Richtung, die Hausdorff vertrat, nicht gerecht werden, da er der Meinung war, die Wahrscheinlichkeitsrechnung sei für die Lösung der Probleme der Lebensversicherungswissenschaft prinzipiell ungeeignet. So resümiert er am Ende seines Buches:

> Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherung haben innerlich nichts miteinander zu schaffen [· · ·] In der That hat die Praxis von all den zu Gebote stehenden Theorien [des Risikos – W. P.] noch nie einen Gebrauch gemacht, in der Hauptsache sicherlich aus dem Grund, weil ein wirkliches Bedürfnis dafür fehlte.[45]

Die nichtssagende Besprechung von Hausdorffs Arbeit durch den Potsdamer Geodäten A. Börsch im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 28 (1897), S. 199–200 (13 Zeilen), erschienen 1900, kann als Rezeption unbeachtet bleiben.

Spätestens mit dem Bericht über Lebensversicherungs-Mathematik im Band I der *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* ([Boh 1901]), verfaßt von dem Göttinger Versicherungsmathematiker Georg Bohlmann, wurden Hausdorffs Ideen Teil des versicherungsmathematischen Diskurses. Bohlmann verweist mehrfach auf Hausdorffs Arbeit und hebt besonders dessen Grundgedanken hervor, die Varianz des Verlustes des Versicherers (das mittlere Risiko) als eine wichtige Kenngröße zu studieren. Wir haben schon mehrere der Bohlmannschen Kommentare zitiert; hier sei lediglich noch die Empfehlung angeführt, die er zu Beginn des Kapitels über Risikotheorie ausspricht:

> Zur Einführung in die Theorie des Risikos sind zu empfehlen die unter Litt.-Verz. VI angeführte Monographie von *C. Bremiker* (1859) und ein Aufsatz von *F. Hausdorff*, Leipz. Ber. 1897, p. 497. Ausführlichere Darstellungen geben *Th. Wittstein*, Das mathematische Risiko und die Dissertation von *J. H. Peek* [[Pe 1898] – W. P.]. Jene ist jedoch nicht immer zuverlässig, diese ausserordentlich kompliziert.[46]

---

[45] [Wa 1898], S. 154–155. Boehm schreibt ([Boe 1933–1938], Teil IV, S. 280) daß die „große Verbreitung dieses Buches [· · ·] zu beklagen" sei, weil es „gerade die Praktiker [· · ·] in ihrer ablehnenden Haltung gegenüber der Risikotheorie bestärkt."

[46] [Boh 1901], S. 903. Peek war in seiner Dissertation [Pe 1898] auch auf die damals gerade erschienene Schrift Hausdorffs eingegangen. Leider konnte diese auf holländisch verfaßte Arbeit nicht beschafft werden. F. Boehm hat sie eingehend gewürdigt ([Boe 1933–1938], Teil

Auch in der Lehrbuchliteratur wurde HAUSDORFFs Arbeit sehr bald rezipiert. 1903 erschien als Band IX von „Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen“ das Buch *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* des Wiener Wahrscheinlichkeitstheoretikers und Versicherungsmathematikers EMANUEL CZUBER ([Cz 1903]). Dieses Buch erlebte sechs Auflagen (ab der zweiten Auflage erweitert und in zwei Bänden) und war bis in die 20-er Jahre das beherrschende Lehrbuch im deutschsprachigen Raum.[47] CZUBER studiert mit mehrfachem Verweis auf HAUSDORFF ganz allgemein die Kenngrößen „durchschnittliches Risiko“ und „mittleres Risiko“ und schließt sich bei der Behandlung des mittleren Risikos einer Lebensversicherung HAUSDORFFs Vorgehen an:

> Um ein möglichst umfassendes Resultat zu erzielen, möge der von *F. Hausdorff* eingeschlagene Weg befolgt und eine Versicherungskombination konstruiert werden, die sich durch Spezialisierung einzelner Größen in die üblichen Versicherungsarten überführen läßt.[48]

Beim Satz von HATTENDORFF erwähnt CZUBER HAUSDORFF allerdings nicht und macht merkwürdigerweise beim Beweis denselben Fehler, den schon HATTENDORFF selbst begangen hatte.

In der Monographie *Das Risiko der Lebensversicherungs-Anstalten und Unterstützungskassen* ([Kü 1906]) ging es dem Autor W. KÜTTNER vor allem darum, praktisch verwertbare Aussagen über einen Sicherungsfonds zu erhalten; seine Überlegungen haben aber nicht zu allgemein anerkannten Kriterien geführt. KÜTTNER reklamiert für sich, ein ganz neues Risikomaß gefunden zu haben. Sein „absolutes Risiko“ ist aber nichts anderes als ein gewisses Vielfaches des mittleren Risikos. In seinen Berechnungen für verschiedene Versicherungsarten fußt er deshalb weitgehend auf HAUSDORFF (S. 34 f.).[49] In der Einleitung geht er kurz auf einige seiner Vorgänger ein; über HAUSDORFFs Arbeit schreibt er dort:

> Auf die *Hausdorffsche* Abhandlung, die einwandfreieste Arbeit auf dem Gebiete des Risikos, soll besonders hingewiesen werden, zumal sie von *Czuber* dem Abschnitte „Risiko“ in seiner Wahrscheinlichkeitsrechnung mit zugrunde gelegt worden ist.[50]

An sechzehn verschiedenen Stellen seines Werkes hat KÜTTNER auf HAUSDORFFs Arbeit verwiesen; an einer Stelle (S. 28) auch mit einer grundsätzlichen Kritik, die aber unberechtigt ist.[51]

IV, S. 257–279); dort heißt es in Bezug auf HAUSDORFF: „Peek nennt mit Recht diese Arbeit Hausdorffs die beste, die bisher über unser Thema erschienen sei. Hausdorffs Urteil über Zech und Wittstein könne er sich nur anschließen.“ (S. 278)

[47] Die sechste, damals schon hoffnungslos veraltete Auflage erschien 1941.

[48] [Cz 1903], S. 556.

[49] Auf S. 45 weist er darauf explizit hin: „Der Weg, den *Hausdorff* betreten hat, und dem wir S. 34 gefolgt sind, ist auch gangbar, wenn es sich um das derzeitige Risiko einer *bereits laufenden* gemischten Versicherung gegen jährliche Prämienzahlung handelt, [$\cdots$].“

[50] [Kü 1906], S. 1–2.

[51] R. ROTHAUGE hat sie später in [Ro 1909], S. 695 zurückgewiesen.

Die Risikotheorie bildete erstmals auf dem 6. Internationalen Aktuarkongreß 1909 in Wien einen der vorgegebenen Diskussionsschwerpunkte. Im Mittelpunkt der Beiträge auf dem Wiener Kongreß stand das Bemühen, eine Verbindung der theoretischen Vorstellungen mit der Praxis herzustellen. In Bezug auf HAUSDORFFs Vorschlag, die Varianz des Verlustes des Versicherers bzw. die bedingte Varianz unter der Bedingung, daß die Lebensversicherung schon m Jahre besteht, als charakteristische Größen zu studieren, ist besonders der Beitrag von G. BOHLMANN *Die Theorie des mittleren Risikos in der Lebensversicherung* ([Boh 1909]) zu erwähnen, dem es darauf ankam, die Bedeutung des „mittleren Risikos" für die Lebensversicherungs-Mathematik zu zeigen. An theoretischen Ergebnissen werden besonders der HATTENDORFFsche Satz und die „grundlegenden Formeln" von HAUSDORFF ([Boh 1909], S. 604; gemeint sind die Formeln (69) und (70) in HAUSDORFFs Arbeit, s. o. S. 514) hervorgehoben. Durch viele Beispielrechnungen sucht BOHLMANN einen praktischen Bezug herzustellen. Ein Kapitel widmet sich der Auseinandersetzung mit den Einwänden gegen die Risikotheorie.

Auch in den Lehrbüchern von H. BROGGI ([Bro 1911]) und A. BERGER ([Be 1925]) wird die Risikotheorie behandelt.[52] BROGGI ([Bro 1911], S. 323) überträgt mit Verweis auf HAUSDORFF dessen Betrachtungen über das relative Risiko ([H 1897a], S. 510–511) auf die Versicherungsmathematik (Stabilitätsproblem) und übernimmt ohne Beweis HAUSDORFFs Ungleichung für die Mindestanzahl neu hinzukommender Spieler (Versicherter) unter der Bedingung, daß sich das relative Risiko nicht vergrößert (s. o., S. 507).[53] Bei BERGER wird ganz analog zum Vorgehen von CZUBER und mit Verweis auf HAUSDORFF dessen allgemeines Modell einer kombinierten Versicherung zugrundegelegt und daraus werden dann die mittleren Risiken spezieller Versicherungen ab einem Zeitpunkt m berechnet. (HAUSDORFFs Formeln (69) und (70); [Be 1925], S. 33).

Der 9. Internationale Aktuarkongreß 1930 in Stockholm hatte wiederum einen Programmpunkt „Risikotheorie". In seinem Generalbericht zu den dazu eingereichten Arbeiten stellte H. CRAMÉR fest, daß die meisten Beiträge nach wie vor vom individuellen Modell ausgingen:

> A great part of the work laid down on the theory of risk has been concerned with the deduction of formulae for the calculation of mean risks and average risks for various types of policies, [· · ·][54]

[52] In einer Reihe von Lehrbüchern der Versicherungsmathematik kam die Risikotheorie wegen ihrer damals geringen praktischen Bedeutung gar nicht vor.

[53] Daß im Kreise der Versicherungsmathematiker HAUSDORFFs Arbeit als Ausgangspunkt der neueren Risikotheorie gesehen wurde, auf der dann BOHLMANN und andere aufbauten, wird aus der Besprechung des BROGGIschen Lehrbuches im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* deutlich. Dort schreibt TIMERDING: „Dagegen ist die Theorie des Risikos, die den Schluß bildet (S. 313–347), wesentlich mathematischer Natur; ihre Darstellung verwertet hauptsächlich auf Grund der *Bohlmann*schen Bearbeitung die von *Hausdorff* eingeführten Begriffsbestimmungen und mündet in einer Behandlung der Stabilitätstheorie aus, die in knappen Formeln die mathematische Beurteilung des Versicherungsgeschäftes gibt." (Bd. 42 (1911), ersch. 1914, S. 259.) Dem Stabilitätsproblem widmet sich mit Verweis auf HAUSDORFF und BROGGI auch H. KOEPPER ([Koe 1915]).

[54] [Cr 1930b], S. 4. Explizit auf HAUSDORFF bezieht sich unter den in Rede stehenden Ar-

Die Verbindung zur Praxis liefert dann letztlich der Zentrale Grenzwertsatz:

> Applying this theorem to the total gain arising in a group of a large number of policies, it follows that fluctuations exceeding three or four times the mean risk are practically impossible. The majority of applications of the theory of risk to practical problems have been founded upon this theorem, and it is to this fact that the conception of the mean risk owes its particular importance. If the approximation obtained by using the normal law is really satisfactory, than we can solve all our problems by the calculation of the mean risk.[55]

Aber gerade das Problem der Güte der Approximation war in der „klassischen Risikotheorie" überhaupt nicht thematisiert worden – und CRAMÉR hatte schon 1923 nachdrücklich auf diese Lücke hingewiesen und eigene Untersuchungen zur Güte der Approximation im Zentralen Grenzwertsatz angestellt ([Cr 1923]). Cramér selbst arbeitete um 1930 jedoch schon an einem ganz neuen Ansatz, dem das kollektive Modell zugrunde lag (s. u., Abschnitt 5.).

Die ausführlichste Darstellung des Inhalts der HAUSDORFFschen Arbeit und die eingehendste Würdigung gab der Münchener Versicherungsmathematiker FRIEDRICH BOEHM in seinem fünfteiligen Aufsatz *Ueber die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Risikotheorie in der Lebensversicherung* ([Boe 1933–1938]), auf den schon mehrfach Bezug genommen wurde. BOEHM widmet der Besprechung von HAUSDORFFs Aufsatz 22 Seiten (!) (Teil III, Abschnitt 9, S. 917–939); hier sei nur noch die allgemeine Einschätzung angefügt, mit der BOEHM den Abschnitt über HAUSDORFF beginnt:

> Einen gewissen Abschluß der Risikotheorie des vorigen Jahrhunderts bildet die Arbeit Hausdorffs in den sächs. Akademie-Berichten der math. phys. Klasse 49 (1897) „Das Risiko bei Zufallsspielen." Hausdorff hat in dieser Arbeit nicht nur die Risikotheorie durch neue Gedanken bereichert, sondern er hat auch die mannigfachen Fehler, welche im Laufe der Entwicklung von den verschiedenen Autoren begangen wurden, klar erkannt und sie mit einer einzigen Ausnahme verbessert.[56]

Die vermutlich zeitlich letzten expliziten Hinweise auf HAUSDORFFs Beiträge zur Versicherungsmathematik finden sich in dem Standardwerk von BERGER ([Be 1939]) und in dem Beitrag *Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Theorie des mittleren Risikos* des amerikanischen Versicherungsmathematikers EUGEN LUKACS für den 12. Internationalen Aktuarkongreß 1940 in Luzern ([Luk 1940]). BERGER nennt HAUSDORFFs Ausdrücke für die mittleren Risiken ab einem Zeitpunkt die „Hausdorffschen Formeln" (S. 257, 262); sie werden bei ihm z. T. für allgemeinere Fälle angegeben (S. 262). LUKACS ersetzt die

---

beiten nur noch der Beitrag von O. GRUDER aus Wien ([Gru 1930]); dort heißt es: „Die von Hausdorff für das mittlere Risiko aufgestellten Formeln können wie folgt verallgemeinert werden: [$\cdots$]" (S. 29).

[55] [Cr 1930 b], S. 5.

[56] [Boe 1933–1938], Teil III, S. 917–918. Die kritische Bemerkung bezieht sich auf die vorletzte Formel auf S. 547 von HAUSDORFFs Arbeit; ausführlich dazu bei BOEHM, Teil II, S. 327–328.

Sterbenswahrscheinlichkeiten für jedes Alter x durch eine „Totenverteilung“, d. h. durch eine diskrete Zufallsgröße $Y_{x,n}$, welche die Werte $i = 1, 2, \ldots, n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $v_x(n|i)$ annimmt; $v_x(n|i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß von n Personen des Alters x im nächsten Jahr i sterben. Unter der Voraussetzung, daß $\frac{1}{n}\,\mathrm{E}Y_{x,n}$ unabhängig von n ist (unter Gleichaltrigen steigen die beobachteten Todesfälle im selben Verhältnis, in dem das Beobachtungsmaterial erweitert wird), werden von LUKACS

> die Begriffe des mittleren Risikos für ein Versicherungsjahr, sowie für eine Reihe von Jahren entwickelt. Ferner wird gezeigt, daß das Hattendorffsche Theorem und die Hausdorffschen Beziehungen zwischen den mittleren Risiken verschiedener Versicherungskombinationen gelten, [. . .].[57]

5. Ausblick

HAUSDORFFs Beitrag zur Mathematik der Lebensversicherung bezieht sich auf das individuelle Modell, welches von der einzelnen Police oder einer Gesamtheit gleicher Policen ausgeht. HANS WYSS sprach in seinem Überblicksartikel *Die Risikotheorie und ihre Bedeutung für die Versicherungsmathematik* ([Wy 1953]) in Bezug auf die Betrachtungen zum Risiko im individuellen Modell direkt von „individueller Risikotheorie“. Deren Bedeutung für die Praxis war aber trotz jahrzehntelanger Bemühungen gering geblieben.

Bereits auf dem Internationalen Aktuarkongreß 1909 in Wien hatte der schwedische Versicherungsmathematiker FILIP LUNDBERG in seinem Aufsatz *Über die Theorie der Rückversicherung* ([Lun 1909]) ganz neue Ideen präsentiert. Sie waren der Ausgangspunkt für die sogenannte kollektive Risikotheorie. Der Baustein für die Ausgaben des Versicherers ist bei LUNDBERG nicht mehr die fällig werdende Leistung der individuellen Police, sondern der Schadensfall im Gesamtbestand (kollektives Modell). Wenn man seine Ideen in moderner Terminologie ausdrückt, so studierte er den stochastischen Prozeß

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \,,$$

wobei $N(t)$ die Anzahl der Schadensfälle in $(0, t]$ und X_i die Höhe des Schadens mit der Nummer i ist. Für die Größen $N(t), X_i$ macht LUNDBERG wahrscheinlichkeitstheoretische Annahmen, die in heutiger Terminologie auf folgendes hinauslaufen: $N(t)$ ist ein homogener Poissonprozeß, X_i sind unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen und X_i und $N(t)$ sind ebenfalls unabhängig. LUNDBERGs Ansatz blieb lange unbeachtet. Erst H. CRAMÉRs Festschrift zum Jubiläum der schwedischen Versicherungsgesellschaft Skandia ([Cr 1930c]) hat LUNDBERGs Ideen mit der modernen Stochastik verknüpft, weiterentwickelt

[57] [Luk 1940], S. 173. Wegen des Krieges fand der Kongreß nicht statt; die eingereichten Beiträge wurden gedruckt.

und bekannt gemacht. Man nennt deshalb als Begründer des kollektiven Modells meist Lundberg und Cramér (z. B. [Bü 1988], S. 113; [Kre 1990], S. 484). In den dreißiger und vierziger Jahren hat sich die mathematische Grundlage der kollektiven Risikotheorie, die Theorie der stochastischen Prozesse, stürmisch entwickelt; ein Höhepunkt war die erste umfassende Monographie *Stochastic Processes* von J. L. Doob ([Do 1953], dort findet man auch S. 623–639 historische Anmerkungen und einen Überblick über die bis dahin erschienene einschlägige Literatur).

Bereits auf dem 14. Internationalen Aktuarkongreß 1954 in Madrid wurden die Beiträge zur Risikotheorie und Rückversicherung vollständig vom kollektiven Modell beherrscht (Beiträge von A. Ammeter, G. Arfwedson, S. Bjerreskov und H. Wyss in [A 1954]). Die erste Monographie zur kollektiven Risikotheorie war die zweite Skandia-Festschrift von Cramér unter dem Titel *Collective Risk Theory. A Survey of the Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes* ([Cr 1955]). Cramér widmete sich darin vor allem der Untersuchung des Gesamtschadenprozesses (Risikoprozesses) und studierte das Ruinproblem.

Von größter Bedeutung war es, daß das kollektive Modell sehr bald in der Schadensversicherungsmathematik Eingang fand und hier erst seine Fruchtbarkeit richtig unter Beweis stellen konnte. Mit der Formierung der Vereinigung ASTIN (Actuarial Studies in Non-life Insurance) Ende der fünfziger Jahre und der Herausgabe des ASTIN-Bulletins wurde diese Entwicklung nachhaltig gefördert. Charakteristisch für die neue Risikotheorie ist auch ihre enge Verbindung zur mathematischen Statistik (z. B. Credibility-Theorie und Erfahrungstarifierung mittels Bayes-Methoden).

Das fast gleichzeitige Erscheinen dreier grundlegender Monographien ([BPP 1969], [Se 1969], [Bü 1970]) bezeichnete W.-R. Heilmann als einen „Quantensprung“ in der Entwicklung der Risikotheorie ([He 1987], S. 2). 1979 folgte die Monographie von H. U. Gerber ([Ge 1979]), und mit der ersten Tagung zur Risikotheorie im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach im Jahre 1980 war das Gebiet als eigenständige Teildisziplin der Stochastik mit einem stark interdisziplinären Charakter endgültig etabliert. Zur weiteren Entwicklung sei auf [Bü 1988] sowie auf die Monographien [HM 1990], [Gran 1991], [DPP 1994], [DeV 1996], [Sch 1996] und die darin angegebene Literatur verwiesen.

Wenn auch die von Bremiker, Hattendorff, Hausdorff, Peek, Bohlmann u. a. begonnenen Untersuchungen zum Risiko in dem Gebiet, welches man heute als Risikotheorie bezeichnet, keine Rolle mehr spielen, so ist doch die Varianz des Verlustes des Versicherers bei vorgegebenem Leistungs- und Prämienplan einer Lebensversicherung (das Quadrat des mittleren Risikos in Hausdorffs Terminologie) nach wie vor eine grundlegende Größe in der Versicherungsmathematik, ohne daß in der Lehrbuchliteratur noch auf die Ursprünge verwiesen wird. Zum Beispiel dient die Varianz des Verlustes dazu, Lebensversicherungen mit den gleichen Leistungsplänen, aber unterschiedlichen Prämienplänen zu vergleichen. Insbesondere wird der Satz von Hattendorff in modernen Lehrbüchern behandelt (z. B. in [Ge 1995], [MiHe 1999], [Sch 2002]).

Was dessen Beweis betrifft, so hat nur BOEHM auf HAUSDORFFs Ansatz für einen korrekten Beweis hingewiesen. HAUSDORFFs Beweisansatz war ganz allgemein auf „Zufallsspiele“ bezogen, die sukzessive entschieden werden; er hat die Spezialisierung auf die Lebensversicherung nicht explizit durchgeführt. Einen korrekten Beweis für den speziellen Fall einer Todesfallversicherung mit Einmalprämie publizierte W. KÜTTNER 1909 in seinem Resümé über die Arbeiten zum Risiko auf dem 6. Internationalen Aktuarkongreß in Wien ([Kü 1909]). Ganz dem HATTENDORFFschen Theorem war die Arbeit von J. F. STEFFENSEN gewidmet ([St 1929]). STEFFENSEN erwähnt HAUSDORFF und KÜTTNER nicht. Er kritisiert zunächst den falschen Beweis von CZUBER in dessen Lehrbuch (s. o., S. 516), den auch noch BERGER in seinem Lehrbuch [Be 1925] wiederholt; dann gibt er drei verschiedene Beweise. Zwei dieser Beweise stammten von N. P. BERTELSEN, mit dessen Erlaubnis sie STEFFENSEN publizierte.[58] Eine kontinuierliche Version des HATTENDORFFschen Satzes mit Beweis findet sich bei A. BERGER ([Be 1931]), der selbst darauf hinweist, daß sein Beweis in [Be 1925] falsch ist. Der HATTENDORFFsche Satz hat ab Mitte der sechziger Jahre in Arbeiten von J. E. HICKMANN, H. BÜHLMANN, H. WOLTHUIS, H. RAMLAU-HANSEN, R. NORBERG sowie H. MILBRODT und Mitarbeitern weitgehende Verallgemeinerungen und Weiterentwicklungen erfahren und spielt heute u. a. in der Theorie des Deckungskapitals eine wichtige Rolle.[59]

Für HAUSDORFF blieb die Arbeit [H 1897a] eine Gelegenheitsschrift; er hat später nichts mehr zur Versicherungsmathematik publiziert. Er hat aber nicht nur bis 1910 an der Handelshochschule in Leipzig, sondern auch noch in seiner ersten Bonner Zeit über Versicherungsmathematik gelesen, und zwar im Wintersemester 1910/11 an der Handelshochschule in Köln.[60] In dieser Vorlesung hat HAUSDORFF auch in didaktisch meisterhafter Weise die Theorie des mittleren Risikos behandelt (Bll. 60–67). Auf Bl. 67 heißt es unter der Überschrift „Partielle Risiken“:

> Unter Berücksichtigung der Prämienreserve kann man auch das Risico für begrenzte Zeiträume (statt, wie oben, für die ganze Versicherungsdauer) berechnen. Das Risico eines Jahres z. B. führt wieder auf den Begriff der Risicoprämie.

Es werden anschließend für verschiedene Versicherungsfälle die jährlichen Risiken berechnet. Hier müßte HAUSDORFF dann – der obigen Ankündigung folgend – den HATTENDORFFschen Satz angeschlossen haben. Das Manuskript ist aber leider nicht vollständig erhalten; es bricht genau an dieser Stelle ab.

Eine Geschichte der Topologie oder der Mengenlehre oder der Maßtheorie ist ohne den Namen HAUSDORFF nicht denkbar. Aber auch in einer Geschichte der Versicherungsmathematik – wenn sie dereinst geschrieben wird – dürfte FELIX

[58] H. MILBRODT und M. HELBIG stellen in ihren historischen Anmerkungen zum HATTENDORFFschen Theorem fest: „Eine Publikation von Steffensen (1929) wird üblicherweise als Quelle für einen ersten Beweis des ‚exakten Ergebnisses‘ angesehen.“ ([MiHe 1999], S. 490)

[59] S. dazu [MiHe 1999], S. 490 ff.

[60] NL HAUSDORFF : Kapsel 24 : Fasz. 73: „Einführung in die Versicherungsmathematik.“

HAUSDORFF nicht fehlen.

Literatur

[A 1930] Neuvième Congrèss International d'Actuaires. *Rapports, D.: Problème du Risque.* Almquist & Wiksell, Uppsala 1930.

[A 1954] *Memorias del Décimocuarto Congreso International de Actuarios.* Madrid 1954. S. A. Blass, Madrid 1954.

[Be 1925] BERGER, A.: *Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik.* Bd. 2, Springer, Berlin 1925.

[Be 1929] BERGER, A.: *Über das Äquivalenzprinzip.* Skandinavisk Aktuarietidskrift **12** (1929), 197–217.

[Be 1931] BERGER, A.: *Über den Hattendorffschen Risikosatz.* Assekuranz - Jahrbuch **50** (1931), 18–39.

[Be 1939] BERGER, A.: *Mathematik der Lebensversicherung.* Springer, Wien 1939.

[Boe 1933–1938] BOEHM, F.: *Ueber die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Risikotheorie in der Lebensversicherung.* Das Versicherungsarchiv. Teil I, **4** (1933/34), 561–584; Teil II, **5** (1934/35), 241–260, 321–333; Teil III, **5** (1934/35), 753–777, 913–939; Teil IV, **9** (1938/39), 161–183, 257–289; Teil V, **9** (1938/39), 593–629.

[Boh 1901] BOHLMANN, G.: *Lebensversicherungs-Mathematik.* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. I,2, Teubner, Leipzig 1900–1904, 852–917 (abgeschlossen im April 1901).

[Boh 1902] BOHLMANN, G.: *Ein Satz von Wittstein über das durchschnittliche Risiko.* Mittheilungen des Verbandes der österr. und ungar. Versicherungstechniker, Heft VII (1902), Separatdruck ohne Paginierung.

[Boh 1909] BOHLMANN, G.: *Die Theorie des mittleren Risikos in der Lebensversicherung.* Reports, Memoirs and Proceedings of the Sixth International Congress of Actuaries, Vienna 1909, Vol. I, 593–673.

[Bor 1917] BORTKIEWICZ, L. VON: *Die Iterationen. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, Berlin 1917.

[BPP 1969] BEARD, R. E.; PENTIKÄINEN, T.; PESONEN, E.: *Risk Theory. The Stochastic Basis of Insurance.* Chapman and Hall, New York 1969, 1977^2, 1984^3.

[Bra 1925/1963] BRAUN, H.: *Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik.* Duncker & Humblot, Berlin 1925, 1963^2.

[Bre 1859] Bremiker, C.: *Das Risiko bei Lebensversicherungen.* Nikolaische Buchhandlung, Berlin 1859.

[Bri 1996] Brieskorn, E. (Hrsg.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Aspekte seines Werkes.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1996.

[Bro 1911] Broggi, H.: *Versicherungsmathematik.* Teubner, Leipzig 1911. Deutsche Übersetzung von *Matematica attuariale*, U. Hoepli, Milano 1905.

[Bü 1970] Bühlmann, H.: *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[Bü 1988] Bühlmann, H. *Entwicklungstendenzen in der Risikotheorie.* Jahresbericht der DMV **90** (1988), 111–128.

[C 1898] Cantor, M.: *Politische Arithmetik oder Die Arithmetik des täglichen Lebens.* Teubner, Leipzig 1898, 1903^2.

[Cr 1923] Cramér, H.: *Das Gesetz von Gauss und die Theorie des Risikos.* Skandinavisk Aktuarietidskrift **6** (1923), 209–237.

[Cr 1930a] Cramér, H.: *The Theory of Risk in its Application to Life Insurance.* In: [A 1930], 166–178.

[Cr 1930b] Cramér, H.: *The Risk Problem. Extraordinary Review of Reports from Different Countries.* In: [A 1930], eigene Paginierung: 1–10.

[Cr 1930c] Cramér, H.: *On the Mathematical Theory of Risk.* Skandia Festskrift, Stockholm 1930.

[Cr 1955] Cramér, H.: *Collective Risk Theory. A Survey of the Theory from the Point of View of the Theory of Stochastic Processes.* The Jubilee Volume of Försäkringsaktiebolaget Skandia, Esselte, Stockholm 1955.

[Cr 1976] Cramér, H.: *Half a century with probability theory: some personal recollections.* The Annals of Probability **4** (1976), 509–546.

[Cz 1900] Czuber, E.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. I,2, Teubner, Leipzig 1900–1904, 733–767.

[Cz 1903] Czuber, E.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.* Teubner, Leipzig 1903 (B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band IX).

[De V 1996] De Vylder, F. E.: *Advanced Risk Theory.* Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles 1996.

[Do 1953] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, New York 1953.

[DPP 1994] DAYKIN, C. D.; PENTIKÄINEN, T.; PESONEN, M.: *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman and Hall, London– New York 1994.

[Ga 1809] GAUSS, C. F.: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*. Hamburg 1809. WA: Werke, Bd. VII, Göttingen 1906, 3–280.

[Ga 1823] GAUSS, C. F.: *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*. Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingensis recentioris **5** (1823). WA: Werke, Bd. IV, Göttingen 1880, 3–26.

[Ge 1979] GERBER, H. U.: *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Irwin, Homewood (Ill.) 1979.

[Ge 1995] GERBER, H. U.: *Life Insurance Mathematics*. Second Edition. Springer, Berlin etc. 1995.

[Gi 1996] GIRLICH, H.-J.: *Hausdorffs Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie*. In: [Br 1996], 31–70.

[Gr 1888] GRAM, J. P.: *Om Middelfejl paa Værdien af Livsforsikringer*. Tidsskrift for Mathematik **6** (1888), 97–120. *Tillag til Afhandlingen om Middelfejl ...* , ebd., 184–187.

[Gran 1991] GRANDELL, J.: *Aspects of Risk Theory*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1991.

[Gru 1930] GRUDER, O.: *Zur Theorie des Risikos*. In: [A 1930], 18–42.

[Ha 1998] HALD, A.: *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1830*. Wiley & Sons, New York 1998.

[Hat 1868] HATTENDORFF, K.: *Über die Berechnung der Reserven und das Risiko bei der Lebensversicherung*. Masius' Rundschau der Versicherungen **18** (1868), 169–183.

[He 1987] HEILMANN, W.-R.: *Grundbegriffe der Risikotheorie*. VVW Karlsruhe 1987.

[HM 1990] HIPP, C.; MICHEL, R.: *Risikotheorie. Stochastische Modelle und statistische Methoden*. VVW Karlsruhe 1990.

[Ko 1998] KOCH, P.: *Geschichte der Versicherungswissenschaft in Deutschland*. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe 1998.

[Koe 1915] KOEPPER, H.: *Risikoberechnungen bei mehr als zwei Ereignissen ein und desselben Zeitraums*. Zeitschrift für Mathematik und Physik **63** (1915), 390–436.

[Kre 1990] Krengel, U.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* In: *Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990. Festschrift zum Jubiläum der DMV.* Vieweg, Braunschweig–Wiesbaden 1990, 457–489.

[Kü 1906] Küttner, W.: *Das Risiko der Lebensversicherungs-Anstalten und Unterstützungskassen.* Mittler & Sohn, Berlin 1906 (Heft VII der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft).

[Kü 1909] Küttner, W.: *Das Risiko auf dem VI. Internationalen Kongreß für Versicherungswissenschaft zu Wien 1909.* Mitteilungen des Österreichisch-Ungarischen Verbandes der Privatversicherungs-Anstalten. Neue Folge. **5** (1909), 113–133.

[La 1895] Landré, C. L.: *Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung.* Gustav Fischer, Jena 1895.

[La 1921] Landré, C. L.: *Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung.* 5. erw. Aufl. von [La 1895], Gustav Fischer, Jena 1921.

[Le 1925] Lévy, P.: *Calcul des probabilités.* Gauthier-Villars, Paris 1925.

[Lo 1922] Lorey, W.: *Das Studium der Versicherungsmathematik.* Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft **22** (1922), 281–295.

[Luk 1940] Lukacs, E.: *Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Theorie des mittleren Risikos.* In: Berichte des 12. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940, Band I, Orell Füssli, Zürich 1940, 171–198.

[Lun 1909] Lundberg, F.: *Über die Theorie der Rückversicherung.* Reports, Memoirs and Proceedings of the Sixth International Congress of Actuaries, Vienna 1909, Vol. I, 877–949.

[Ma 1903] Manes, A.: *Versicherungs-Wissenschaft auf deutschen Hochschulen.* Mittler & Sohn, Berlin 1903.

[MiHe 1999] Milbrodt, H.; Helbig, M.: *Mathematische Methoden der Personenversicherung.* Walter de Gruyter, Berlin - New York 1999.

[Pe 1898] Peek, J. H.: *Toepassing der Waarschijnlijkheids-Rekening op Levensverzekering en Sterfte-Statistiek.* Dissertation, Utrecht 1898.

[Ro 1909] Rothauge, A.: *Das technische Zufallsrisiko.* Reports, Memoirs and Proceedings of the Sixth International Congress of Actuaries, Vienna 1909, Vol. I, 685–711.

[Sch 1996] Schmidt, K. D.: *Lectures on Risk Theory.* Teubner, Stuttgart 1996.

[Sch 2002] SCHMIDT, K. D.: *Versicherungsmathematik.* Springer, Berlin etc. 2002.

[Schn 1989] SCHNEIDER, I. (Hrsg.): *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933.* Akademie-Verlag, Berlin 1989.

[Se 1969] SEAL, H. L.: *Stochastic Theory of a Risk Business.* Wiley & Sons, New York 1969.

[St 1929] STEFFENSEN, J. F.: *On Hattendorff's Theorem in the Theory of Risk.* Skandinavisk Aktuarietidskrift **12** (1929), 1–17.

[Te 1785/86] TETENS, J. N.: *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tod einer oder mehrerer Personen abhangen, mit Tabellen zum praktischen Gebrauch.* Weidmann, Leipzig 1785/86.

[Th 1897] THIELE, T. N.: *Elementær Iagttagelseslære.* Gyldendal, Copenhagen 1897.

[Th 1903] THIELE, T. N.: *Theory of Observations.* Layton, London 1903 (Übersetzung von [Th 1897]). WA: Annals of Mathematical Statistics **2** (1931), 165–307.

[V 2003] VOSS, W.: *Zur Geschichte der Versicherungsmathematik an der TU Dresden bis 1945.* Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft **92** (2003), 275–303.

[Wa 1898] WAGNER, K.: *Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung.* Gustav Fischer, Jena 1898.

[Wi 1885] WITTSTEIN, TH.: *Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften sowie aller auf dem Spiele des Zufalls beruhenden Institute.* Hahnsche Buchhandlung, Hannover 1885.

[Wi 1887] WITTSTEIN, TH.: *Weitere Folgerungen aus der Theorie des mathematischen Risiko der Versicherungsgesellschaften.* Assekuranz-Jahrbuch **8** (1887), Teil II, 3–10.

[Wy 1953] WYSS, H.: *Die Risikotheorie und ihre Bedeutung für die Versicherungsmathematik.* Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker **53** (1953), 23–45.

[Z 1861] ZECH, J.: *Das Risiko bei Lebensversicherungen.* Tübingen 1861.