3. Borelsche Funktionen

Dieser Abschnitt enthält drei Noten HAUSDORFFs über *Borelsche Funktionen* vom März 1937. Unter Borelschen Funktionen verstand HAUSDORFF Funktionen, für die das Urbild jeder offenen Menge eine Borelmenge ist. In heutiger Terminologie sind Borelsche Funktionen *Borel-meßbare* (B-meßbare) *Abbildungen*. Diese fallen mit den Abbildungen der *Baireschen Klassifikation* zusammen, wenn man letztere direkt mit Φ_1 beginnt (s. Anmerkungen [129] und [135] zu *Mengenlehre*).

KURATOWSKI definierte in [Ku 1934] eine Abbildung $f : X \to Y$ als *Abbildung der Klasse* α $(\alpha < \omega_1)$, wenn alle f-Urbilder von offenen Mengen in Y G^α-Mengen in X sind. (Dies ist dasselbe wie die *Funktionen der Klasse* (G^α, F^α) im Sinne von § 43, *Mengenlehre*; s. Anmerkung [134] zu *Mengenlehre*.) Ein *Homöomorphismus der Klasse* α, β ist dementsprechend eine bijektive Abbildung f der Klasse α, so daß f^{-1} von der Klasse β ist. Im Fokus von HAUSDORFFs Interesse an diesen Untersuchungen standen solche Eigenschaften Borelscher Funktionen, die deren Klassen mit den Klassen ihrer Definitionsbereiche und Wertevorräte in Verbindung bringen, insbesondere, wenn der Wertevorrat ein „Nullraum" ist, d. h. der nulldimensionale Bairesche Raum $\mathscr{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (homöomorph mit der Menge der irrationalen Zahlen), oder eine von dessen Teilmengen.

Die zum Abdruck ausgewählten Faszikel 618 und 619 enthalten HAUSDORFFs Überarbeitung von hauptsächlich auf KURATOWSKI zurückgehenden Resultaten, welche die Erweiterung von Borelfunktionen und deren Anwendung auf abgeschlossene und Borelsche Teilmengen von $\mathscr{N}$ betreffen. Der abschließende Faszikel 620 enthält die ursprüngliche Version von HAUSDORFFs Satz aus der Publikation [H 1937] (über verdichtete Borelmengen als Borelsche Bilder des gesamten Nullraumes $\mathscr{N}$) und viele weitere damit zusammenhängende Bemerkungen und Behauptungen.

In den hier in Rede stehenden Noten benutzt HAUSDORFF die Symbole F^α, G^α, H^α zur Bezeichnung der Borelschen Klassen in derselben Bedeutung wie in dem oben (Abschnitt 2.) abgedruckten Fasz. 662, d. h. F^α, G^α, H^α fallen (in moderner Notation) mit $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$, $\mathbf{\Pi}^0_{1+\alpha}$, $\mathbf{\Delta}^0_{1+\alpha}$ zusammen. F^α, G^α fallen jedoch *nicht* mit F^α, G^α in *Mengenlehre* zusammen (s. den Kommentar zu Fasz. 662 im Abschnitt 2).

NL HAUSDORFF : Kapsel 40 : Fasz. 618
Erweiterung Borelscher Funktionen
Hs. Ms. - [Bonn], 4. 3. 1937. - 8 Bll.[1]

Erweiterung Borelscher Funktionen. 4. 3. 37

[1] Die Borelschen Mengen des Raumes X seien F^α, G^α; H^α die zweiseitigen (die zugleich F^α, G^α sind). Ist $A \subset X$, so sind AF^α, AG^α die Mengen, die rel[ativ] A F^α, G^α sind (per definitionem); unter den relativ zweiseitigen,

[1]Fasz. 618 ist im Faksimile abgedruckt in [H 1969], Band 2, S. 247–254.

die zugleich AF^α, AG^α sind, befinden sich jedenfalls die Mengen AH^α, aber nicht jede relativ zweiseitige ist ein AH^α. (Z.B. $\alpha = 0$; wenn X zusammenhängend ist, sind nur 0 und X die Mengen H^0, während in A, wenn es nicht zusammenhängend ist, auch noch andere zugleich offene und abgeschlossene Mengen als 0 und A existieren). Wenn jedoch A ein F^α ($\alpha > 0$) ist, so ist jede Menge A_1, die zugleich AF^α, AG^α ist, von der Form AH^α; denn A_1 und $A_2 = A - A_1$ sind disjunkte F^α und lassen sich (1. Trennungssatz) in disjunkte X_1, X_2, die H^α sind, einschliessen, dann ist $A \subset X_1 + X_2$, $A_1 = AX_1$ ($A_1 \subset AX_1$, $A_2 \subset AX_2$, $AX_1 = A - AX_2 \subset A - A_2 = A_1$). | Bl. 2

(1) *Es sei* $A \subset X$, $A_n = AQ_n$ *in* A *ein* G^α ($Q_n = G^\alpha$). *Dann giebt es eine Menge* $P \supset A$, *die ein* F^α *ist, derart dass die Mengen* $X_n = PQ_n$ (für die ja $AX_n = APQ_n = AQ_n = A_n$ ist) *mit den Mengen* A_n *ähnlich sind* (d.h. mit $A_{n_1} \cdots A_{n_k} = 0$ ist $X_{n_1} \cdots X_{n_k} = 0$; insbesondere mit $A_n = 0$ auch $X_n = 0$).

Sei Q die Summe aller $Q_{n_1} \cdots Q_{n_k}$ mit $A_{n_1} \cdots A_{n_k} = 0$ (oder aller $Q_{n_1} \cdots Q_{n_k} \subset X - A$); Q ist zu A disjunkt, $P = X - Q \supset A$; Q ist ein G^α, P ein F^α. Für $A_{n_1} \cdots A_{n_k} = 0$ ist $Q_{n_1} \cdots Q_{n_k} \subset Q$, $PQ_{n_1} \cdots Q_{n_k} = 0$, $X_{n_1} \cdots X_{n_k} = 0$.

(2) Es sei $A \subset X$ ein F^α ($\alpha > 0$), A_n in A sowohl G^α als F^α, also $A_n = AQ_n$ (Q_n ein H^α). Dann giebt es Mengen $X_n = H^\alpha$, die mit den Mengen A_n ähnlich sind, und für die $AX_n = A_n$; falls die A_n disjunkt und $\sum A_n = A$, kann $\sum X_n = X$ gemacht werden.

Wir setzen $X_n = Q_n - \sum Q_{n_1} \cdots Q_{n_k}$, erstreckt über diejenigen $n_1, \ldots, n_k \leq n$, für die $A_{n_1} \cdots A_{n_k} = 0$. Die Summe enthält endlich viele Summanden, sie und X_n ist ein H^α. Wir haben $AX_n = AQ_n = A_n$. Für $A_{n_1} \cdots A_{n_k} = 0$ und $\max[n_1, \ldots, n_k] = n$ ist | $X_{n_1} \cdots X_{n_k} \subset Q_{n_1} \cdots Q_{n_k}$ zu X_n disjunkt: Bl. 3

$$X_{n_1} \cdots X_{n_k} X_n = X_{n_1} \cdots X_{n_k} = 0 .$$

Ist insbesondere $\sum A_n = A$, so modifizieren wir zunächst die Q_n so, dass $\sum Q_n = X$ wird. Ist noch $\sum Q_n = S \neq X$, also $A \subset S$, so sind A und $X - S$ disjunkte F^α; nach dem 1. Trennungssatz giebt es ein $Q_0 = H^\alpha$ mit $X - S \subset Q_0$, $AQ_0 = 0$. Wir fügen (nachdem wir für $A_n = 0$ auch $Q_n = 0$ gesetzt haben) das Q_0 einem $Q_m \neq 0$ hinzu, wodurch $A(Q_m + Q_0) = AQ_m = A_m$ sich nicht ändert; schreiben wir wieder Q_m statt $Q_m + Q_0$, so ist nun die Summe der Q_n gleich $S + Q_0 = X$. – Sind weiter die A_n disjunkt, so reduziert sich die Ähnlichkeitsforderung darauf, dass mit A_n auch X_n verschwindet und dass zwei X_n mit verschiedenen Indizes disjunkt sind; dies wird erreicht durch

$$X_n = Q_n - \sum_{m<n} Q_m$$

(für $A_n = 0$ ist $Q_n = X_n = 0$); es bleibt

$$AX_n = A_n - \sum_{m<n} A_m = A_n ,$$

Bl. 4 und es ist $\sum X_n = \sum Q_n = X$. |

(3) Es sei $A \subset X$ und ein System von Mengen $A_{n_1 \dots n_k} = AQ_{n_1 \dots n_k}$ gegeben, die in A G^α sind ($Q_{n_1 \dots n_k} = G^\alpha$). Dann giebt es eine Menge $P \supset A$, $P = F^\alpha$, so dass die Mengen $X_{n_1 \dots n_k} = PQ_{n_1 \dots n_k}$ (für die $AX_{n_1 \dots n_k} = A_{n_1 \dots n_k}$ ist), mit den Mengen $A_{n_1 \dots n_k}$ ähnlich sind.

Das ist nur eine andere Schreibweise für (1).
Setzen wir für festes k:

$$Q^k = \sum_{n_1 \dots n_k} Q_{n_1 \dots n_k}, \quad X^k = \sum_{n_1 \dots n_k} X_{n_1 \dots n_k}; \quad X^k = PQ^k .$$

$X_{n_1 \dots n_k} = PQ_{n_1 \dots n_k} \cdot X^k = X^k Q_{n_1 \dots n_k}$ ist in X^k ein G^α, X^k selbst von der Form $F^\alpha \cdot G^\alpha$. Ferner

$$A^k = \sum_{n_1 \dots n_k} A_{n_1 \dots n_k}; \quad A^k = AQ^k = AX^k .$$

Ist $A_{n_1} \supset A_{n_1 n_2} \supset \cdots$, so kann man auch $Q_{n_1} \supset Q_{n_1 n_2} \supset \cdots$ annehmen (man ersetze $Q_{n_1 n_2}$ durch $Q_{n_1} Q_{n_1 n_2}$ usw.); $Q^1 \supset Q^2 \supset \cdots$, $X^1 \supset X^2 \supset \cdots$. Ist $A = A^1 = A^2 = \cdots$, so ist

$$A \subset \prod_k X^k .$$

(4) Es sei $A \subset X$ ein F^α ($\alpha > 0$), die $A_{n_1 \dots n_k} = AQ_{n_1 \dots n_k}$, $Q_{n_1 \dots n_k}$ ein H^α. Es giebt H^α-Mengen $X_{n_1 \dots n_k}$ mit $A_{n_1 \dots n_k} = AX_{n_1 \dots n_k}$, die mit den $A_{n_1 \dots n_k}$ ähnlich sind. Wenn die $A_{n_1 \dots n_k}$ bei festem k disjunkt sind und stets $A = A^k$, so kann man erreichen, dass alle $X^k = X$ sind.

Der erste Teil der Behauptung ist nur eine andere Schreibweise für (2). Der
Bl. 5 zweite Teil ist für $k = 1$ in (2) bewiesen; nehmen wir an, | er sei für k bewiesen: $X^k = X$. Wir wenden (2) statt auf X, A, A_n auf $X_{n_1 \dots n_k}$, $A_{n_1 \dots n_k}$, $A_{n_1 \dots n_k n}$ an. Es ist $A_{n_1 \dots n_k n} = AQ_{n_1 \dots n_k n} = A_{n_1 \dots n_k} Q_{n_1 \dots n_k n}$ in $A_{n_1 \dots n_k}$ ein H^α; $A_{n_1 \dots n_k} = AX_{n_1 \dots n_k}$ in $X_{n_1 \dots n_k}$ ein F^α. Es giebt also Mengen $X_{n_1 \dots n_k n}$, die mit den $A_{n_1 \dots n_k n}$ ähnlich sind (d. h. mit ihnen zugleich verschwinden und paarweise, bezüglich n, disjunkt sind), die ferner H^α in $X_{n_1 \dots n_k}$, also in X sind; und da

$$A_{n_1 \dots n_k} = \sum_n A_{n_1 \dots n_k n} ,$$

kann

$$\sum_n X_{n_1 \dots n_k n} = X_{n_1 \dots n_k}$$

erreicht werden, was zu $X^{k+1} = X$ führt. Damit ist die Behauptung bewiesen; wir haben genauer

$$X = \sum_{n_1} X_{n_1}, \quad X_{n_1} = \sum_{n_2} X_{n_1 n_2}, \; \dots$$

jedesmal mit disjunkten Summanden.

(Hierzu vgl. Kuratowski, Top. I, p. 165-66). [2]

(5) $f(x)$ sei eine in $A \subset X$ definierte Abbildung der Klasse α in den vollständigen separablen Raum Y. Sie lässt sich zu einer Funktion der Klasse α in einer Menge $A^* = F^{\alpha+1} \supset A$ erweitern; für $\alpha > 0$ und $A = F^\alpha$ zu einer Funktion der Klasse α im ganzen Raum X. (Kuratowski, Top. I, p. 219). [3]

Für $\alpha = 0$ (Erweiterung einer stetigen Funktion von A auf ein $G_\delta \supset A$) ist die Sache bekannt; sei also $\alpha > 0$. Bl. 6

$f(x)$ ist (Banach) gleichmässiger Limes von Funktionen $f^k(x)$ der Klasse α, die in A definiert sind und isolierte Wertmenge haben:

$$f^k(A) = \{y_1^k, y_2^k, \dots\}$$

mit endlich oder abzählbar vielen Punkten rechterhand. Das Urbild

$$A_n^k = E_x[f^k(x) = y_n^k]$$

ist, da y_n^k in $f^k(A)$ gleichzeitig offen und abgeschlossen ist, in A gleichzeitig G^α und F^α. Falls $f^k(A)$ nur endlich ist, setzen wir schliesslich $A_n^k = 0$. Es ist

$$A = \sum_n A_n^k$$

mit disjunkten Summanden. Sei

$$A_{n_1 n_2 \dots n_k} = A_{n_1}^1 A_{n_2}^2 \cdots A_{n_k}^k\,,$$

also

$$A = \sum_{n_1} A_{n_1}, \quad A_{n_1} = \sum_{n_2} A_{n_1 n_2}, \ \cdots\,.$$

Hierzu giebt es nun nach (3) Mengen $X_{n_1 \dots n_k}$ mit $A X_{n_1 \dots n_k} = A_{n_1 \dots n_k}$, die in

$$X^k = \sum_{n_1 \dots n_k} X_{n_1 \dots n_k}$$

G^α (und F^α) sind, während X^k von der Form $F^\alpha G^\alpha$ ist; zugleich

$$X_{n_1} \supset X_{n_1 n_2} \supset \cdots, \quad X^1 \supset X^2 \supset \cdots; \quad A^* = \prod_k X^k$$

ist von der Form $F^{\alpha+1}$ und $\supset A$. Die $X_{n_1 \dots n_k}$ mit festem k sind disjunkt. – Ist speziell $A = F^\alpha$, so kann $X^1 = X^2 = \cdots = X$ gemacht werden, die $X_{n_1 \dots n_k}$ sind Mengen H^α. Bl. 7

Wir erweitern $f^k(x)$ zu $\varphi^k(x)$ auf X^k, indem wir in $X_{n_1 \ldots n_{k-1} n} \quad f^k(x) \,\varepsilon\, y_n^k$ setzen, es wird $\varphi^k(X^k) = f^k(A)$. Das Urbild von y_n^k ist

$$E_x\, [\varphi^k(x) = y_n^k] = \sum_{n_1 \ldots n_{k-1}} X_{n_1 \ldots n_{k-1} n} \;,$$

also in X^k ein G^α; jedes Urbild einer Menge $\subset \varphi^k(X^k) = \{y_1^k, y_2^k, \ldots\}$ ist $= X^k G^\alpha$ und daher zugleich $X^k F^\alpha$; $\varphi^k(x)$ ist in X^k von der Klasse α. $\varphi^k(x|A^*)$ ist in A^* von der Klasse α.

Da die Funktionen $f^k(a)$ in A gleichmässig konvergieren und man also

$$|f^k(a) - f^i(a)| < \frac{1}{i} \quad \text{für} \quad k > i$$

annehmen kann, bilden die Funktionswerte $\varphi^k(x)$ für $x \,\varepsilon\, A^*$ eine Fundamentalfolge. Sei $x \,\varepsilon\, X_{n_1 \ldots n_k} \subset X_{n_1 \ldots n_i}$ und a ein Punkt $\varepsilon\, A_{n_1 \ldots n_k} \subset A_{n_1 \ldots n_i}$ (für $X_{n_1 \ldots n_k} \neq 0$ ist $A_{n_1 \ldots n_k} \neq 0$). Dann ist $\varphi^k(x) = y_{n_k}^k = f^k(a)$ und ebenso $\varphi^i(x) = y_{n_i}^i = f^i(a)$, also

$$|\varphi^k(x) - \varphi^i(x)| < \frac{1}{i} \quad \text{für} \quad k > i, \quad x \,\varepsilon\, A^* \;.$$

Da Y vollständig ist, existiert $\varphi(x) = \lim \varphi^k(x)$ für $x \,\varepsilon\, A^*$ und ist, als gleichmässiger Limes der Funktionen $\varphi^k(x|A^*)$ von der Klasse α, wiederum von der Klasse α. Für $x \,\varepsilon\, A$ ist $\varphi(x) = f(x)$. Damit ist der Satz (5) bewiesen. (Für
Bl. 8 $A = F^\alpha$ kann $A^* = X$ gemacht werden). |

[4] *Jede Funktion der Klasse α in A lässt sich zu einer Funktion der Klasse $\alpha + 1$ in X erweitern.*

Nämlich zu einer Funktion der Klasse α in $A^* = F^{\alpha+1} \supset A$, und diese zu einer Funktion der Klasse $\alpha + 1$ in X.

Anmerkungen

[1] Zur Bedeutung von F^α, G^α, H^α in diesem Faszikel s. den Kommentar zu Fasz. 662 oben in Abschnitt 2.

[2] Hausdorffs vorbereitende Sätze (1) – (4) für den Beweis des Erweiterunssatzes (5) sind Variationen der Resultate in [Ku 1933/1966], § 30.VIII.

[3] Eine Funktion der Klasse α ist eine Funktion f, für welche die f-Urbilder offener Mengen $\mathbf{G}^\alpha$-Mengen sind – mit anderen Worten, eine Funktion der Klasse (G^α, F^α) im Sinne von *Mengenlehre*, § 41, falls man nur reelle Funktionen betrachtet. Der Erweiterungssatz (5) stammt von Kuratowski ([Ku 1933]) und ist ein Theorem in [Ku 1933/1966], § 35.VI. Die letzte Behauptung ist ein Spezialfall von Satz XIV in *Mengenlehre*, § 41 (bzw. Satz III in § 43); daß Hausdorff hier nur reelle Funktionen betrachtet, ist für die Beweisführung nicht wesentlich.

[3] Das Resultat ist ein Korollar in [Ku 1933/1966], § 35.VI; KURATOWSKI gibt dort weitere Literatur an.

NL HAUSDORFF : Kapsel 40 : Fasz. 619

Borelsche Funktionen

Hs. Ms. - [Bonn], 5. 3. 1937. - 18 Bll.[2]

5. 3. 37

Borelsche Funktionen

(Kuratowski, Top. I, p. 177.) [1]

$f(x)$, Abbildung von X in Y, heisst von der Klasse α, wenn $f^{-1}(F)$ ein F^α ist, oder $f^{-1}(G)$ ein G^α.

Durch Induktion nach β folgt: $f^{-1}(F^\beta)$ ist $F^{\alpha+\beta}$, $f^{-1}(G^\beta)$ ist $G^{\alpha+\beta}$. Ist $y = f(x)$ von der Klasse α, $z = g(y)$ von der Klasse β, so ist $g(f(x))$ von der Klasse $\alpha + \beta$. Ist g oder f stetig, so ist gf von der Klasse α, resp. β.

Ist $X = X_1 + X_2 + \cdots$, X_n ein G^α, und die Teilfunktion $f_n = f|X_n$ von der Klasse α, so ist f von der Klasse α. Ist $X = X_1 + \cdots + X_n$, X_k ein F^α und die Teilfunktion f_k von der Klasse α, so ist f von der Klasse α. Mit f ist jede Teilfunktion $f|A$ von der Klasse α.

Ist $f(x, y)$ bezüglich x stetig und bezüglich y von der Klasse α, so ist sie als Funktion von (x, y) von der Klasse $\alpha + 1$. [2]

(Auch wenn die von x, y durchlaufenen Räume X, Y nicht separabel sind. Montgomery – Kuratowski, F. M. 25). | Bl. 2

(Ist $f(x, y)$ bezüglich x und y von der Klasse 1, so braucht sie bezüglich (x, y) nicht Borelsch zu sein. Ist in der Ebene (X, Y) C eine beliebige Menge auf einer Kreisperipherie, so ist die charakteristische Funktion von C bezüglich x und y von der Klasse 1, da sie auf jeder Geraden $y =$ const., $x =$ const. höchstens zwei Unstetigkeitspunkte hat (oder höchstens einen, wenn C auf der Geraden $x = y$ angenommen sind). Als Funktion von (x, y) ist sie dann und nur dann Borelsch, wenn C Borelsch ist.)

Sei $X = (X_1, X_2, \ldots)$ das Produkt von endlich oder abzählbar vielen Räumen X_k; $x = (x_1, x_2, \ldots)$ die Elemente von X, $x_k \in X_k$. $x = f(t)$ eine Abbildung von T in X, bedeutet $x_k = f_k(t)$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots)$, $f_k(t)$ Abbildungen von T in X_k.

Damit $f(t)$ von der Klasse α sei, ist notwendig und bei separablen X_k auch hinreichend, dass jedes $f_k(t)$ von der Klasse α sei. [3]

[2] Fasz. 619 ist im Faksimile abgedruckt in [H 1969], Band 2, S. 255–272.

Notwendig, da $x_k = x_k(x)$ stetige Funktion von x, $f_k(t) = x_k(f(t))$ ist. – Sind die $f_k(t)$ von der Klasse α, U_k in X_k offen, so ist $f^{-1}(U_1, \dots U_k, X_{k+1}, \dots) = {f_1}^{-1}(U_1) \cdots {f_k}^{-1}(U_k) \cdot T \cdots$ ein G^α. Bei separablen X_k sind dann die Ur-
Bl. 3 bilder aller in X offenen Mengen Mengen G^α, da die $(U_1, \dots U_k, X_{k+1}, \dots)$, wenn man die U_k Mengen einer abzählbaren Basis von X_k durchlaufen lässt, eine abzählbare Basis von X bilden.

Allgemeiner: sei $T = (T_1, T_2, \dots)$, $x_k = f_k(t_k)$ eine Abbildung von T_k in X_k; dann ist $x = (f_1(t_1), f_2(t_2), \dots) = f(t)$ eine Abbildung von T (Menge der $t = (t_1, t_2, \dots)$) in $X = (X_1, X_2, \dots)$ (aber eine spezielle Abbildung, indem sie jede Koordinate von t in eine Koordinate von x transformiert).

Sind die $f_k(t_k)$ von der Klasse α und alle X_k separabel, so ist $f(t)$ von der Klasse α.

Denn da $t_k = t_k(t)$ stetige Funktion von t ist, ist $f_k(t_k) = f_k(t_k(t)) = \varphi_k(t)$ auch in t von der Klasse α und $f(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots)$ ebenfalls. Wenn insbesondere $f_k(T_k) = X_k$ (Abbildung von T_k *auf* X_k) so ist $f(T) = X$.

Ist $y = g(x) = g(x_1, x_2, \dots)$ von der Klasse β, so ist $y = g(f(t)) = g(f_1(t_1), f_2(t_2), \dots)$ von der Klasse $\alpha + \beta$ (X_k separabel).

[4] **(I)** *Ist $y = f(x)$* (wieder Abb. von X in Y) *von der Klasse α, so ist $I = \underset{x,y}{E}\,[y = f(x)]$ in (X,Y) ein F^α, falls Y separabel ist. Ist C in (X,Y) ein F^β oder G^β, so ist die Projektion von CI auf X ein $F^{\alpha+\beta}$ oder $G^{\alpha+\beta}$.*

Bl. 4 Beweis: $\varphi(x,y) = |y - f(x)|$ ist von der Klasse α, weil $|y - y_1|$ stetige Funktion von y, y_1 ist ($f(x), y$) ist Abbildung der Klasse α von (X,Y) in (Y,Y), danach kommt die stetige Abbildung $|y_1 - y|$ von (Y,Y) in die Menge E der reellen Zahlen; das giebt eine Abbildung der Klasse α von (X,Y) in E, nämlich $\varphi(x,y)$.) $I = \underset{x,y}{E}\,[\varphi(x,y) = 0]$ als Urbild des Punktes 0 ist also ein F^α. – Ferner ist $g(x) = (x, f(x))$ Abbildung der Klasse α von X in (X,Y), das Urbild $g^{-1}(C)$ von C ist $F^{\alpha+\beta}$ oder $G^{\alpha+\beta}$, wenn C ein F^β oder G^β ist; dies Urbild ist

$$\underset{x}{E}\,[(x, f(x)) \in C] = \underset{x}{E} \sum_y [(x,y) \in C][y = f(x)] =$$

Projektion von $\underset{x,y}{E}\,[(x,y) \in C][y = f(x)] = CI$.

Die Grenzfunktion einer konvergenten Folge $f_n(x)$ (Abbildungen von X in Y) von Funktionen der Klasse α ist von der Klasse $\alpha + 1$, bei gleichmässiger Konvergenz von der Klasse α. (Mengenlehre, S. 267). (Sind die $f_n(x)$ von Klassen $< \alpha$, α eine Limeszahl, so ist $\lim f_n(x)$ von der Klasse $\alpha + 1$, bei gleichmässiger Konvergenz von der Klasse α.)

Bei separablem Y ist eine Funktion der Klasse α stets Grenzfunktion gleichmässig konvergenter *isolierter* Funktionen $f_n(x)$ der Klasse α (d. h. $f_n(X)$
Bl. 5 isoliert).

Jede Menge G_δ im vollständigen Raum ist mit einem vollständigen Raum homöomorph. (Mengenlehre S. 214 f.) [5]

Einfacherer Beweis: $A = \prod G_n$, G_n offen im vollständigen Raum X; es sei $F_n = X - G_n$ (wir können die $G_n \neq X$, $F_n \neq 0$ voraussetzen), $f_n(x) = \frac{1}{\delta(x, F_n)}$ für $x \, \varepsilon \, G_n$. Wir definieren in A als neue Entfernung

$$\rho(x,y) = |x-y| + \sum_n c_n \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} \qquad (c_n > 0, \ \sum c_n \text{ konvergent}) .$$

$\rho(x,y)$ erfüllt die Entfernungsaxiome; die neue Metrik ist mit der alten topologisch äquivalent, denn mit $\rho(x,y) \to 0$ ist $|x-y| \to 0$, und wenn, bei festem x, $y \to x$ in der alten Metrik, so (wegen der gleichmässigen Konvergenz) $\rho(x,y) \to 0$. Der neu metrisierte Raum ist vollständig. Denn wenn x_k darin eine Fundamentalfolge bilden, so auch in alten Raum; und es existiert $\lim x_k = x$; hierbei muss aber $x \, \varepsilon \, A$ sein, denn andernfalls, wenn etwa $x \, \varepsilon \, X - A = \sum F_n$ wäre, etwa $x \, \varepsilon \, F_1$, so würde aus

$$\rho(x_k, x_l) \geqq c_1 \frac{|f_1(x_k) - f_1(x_l)|}{1 + |f_1(x_k) - f_1(x_l)|} \qquad (k < l)$$

für $l \to \infty$ $(f_1(x_l) \to \infty)$ $\underline{\lim}_l \, \rho(x_k, x_l) \geqq c_1$ folgen, während doch sogar $\overline{\lim}_l \, \rho(x_k, x_l)$ mit $k \to \infty$ gegen 0 konvergieren soll. | Bl. 6

Andererseits sind die G_δ, $G_{\delta\sigma}, \ldots$ und (Lavrentieff) die $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}, \ldots$ vollständiger Räume (d. h. die F^α für $\alpha \geqq 1$ und die G^α für $\alpha \geqq 2$) topologisch invariant (Mengenl. S. 214, 218. Die dortige Bezeihung der F^α, G^α ist anders als die jetzige.)

Eine in $A \subset X$ definierte stetige Funktion $f(x)$ lässt sich, wenn Y vollständig ist, zu einer stetigen Funktion in $A^* \supset A$ erweitern, wo A^* ein G_δ ist. (Mengenl. S. 216).

Eine Homöomorphie zwischen A und B, die in vollständigen Räumen X, Y liegen, lässt sich zu einer Homöomorphie zwischen $A^* \supset A$, $B^* \supset B$ erweitern, wo A^*, B^* Mengen G_δ sind (Lavrentieff). [6]

Wir erweitern die topologische Abbildung $y = f(x)$ von A auf B zu einer stetigen Abbildung $f_1(x)$ von $A_1 = G_\delta \supset A$, ebenso die inverse Abbildung $x = g(y)$ zu einer stetigen Abbildung $g_1(y)$ von $B_1 = G_\delta \supset B$. Sei $I = \underset{x,y}{E}\,[y = f_1(x)]$, $K = \underset{x,y}{E}\,[x = g_1(y)]$, A^* und B^* die Projektionen von IK auf X, Y. A^* und B^* sind homöomorph. I ist in (A_1, Y) abgeschlossen, K in (X, B_1), K ein G_δ in (X,Y), IK ein G_δ in I. Die Projektion auf X giebt eine Homöomorphie zwischen I und A_1, bei der also IK (G_δ in I) in A^* (G_δ in A_1) übergeht; A^* ist ein G_δ in X, ebenso B^* eins in Y. | Bl. 7

Eine Homöomorphie zwischen $A \subset U$ (U beliebig, nicht vollständig) und $B \subset Y$ (Y vollständig) lässt sich zu einer Homöomorphie von $\widetilde{A} \supset A$, $\widetilde{A}$ ein

G_δ in U, erweitern. Man nehme X als vollständige Hülle von U, erweitere auf $A^* = G_\delta$ (in X) $\supset A$ und setze $\widetilde{A} = A^* U$.

(Ein n-dimensionales $A \subset U$ ist in einem n-dimensionalen $\widetilde{A} = G_\delta \subset U$ enthalten; der Beweis braucht nur für $n = 0$ geführt zu werden. A ist mit einer Menge B des Cantorschen Diskontinuums Y homöomorph; dies lässt sich auf eine G_δ-Menge $\widetilde{A}$ erweitern, die immer noch 0-dimensional, weil mit einer Menge $\widetilde{B} \subset Y$ homöomorph, ist).

Eine mit einem vollständigen Raum Y homöomorphe Menge A ist ein G_δ im vollst[ändigen] Raum. Denn wenn beim Lavrentieffschen Theorem $B = Y$ ist, so ist $B^* = B$ und $A^* = A$ ein G_δ in X. Also: die G_δ in vollst[ändigen] Räumen = topologische Bilder vollständiger Räume (topologisch vollständige Räume).

Topologische Invarianz von F^α ($\alpha > 0$) und G^α ($\alpha > 1$), von $G_\delta - G'_\delta$, u.a.

[7] Erweiterungssatz (s. mein Ms 4.3.37): $A \subset X$; Y vollständig, separabel. Eine Abbildung der Klasse α von A in Y lässt sich zu einer Abbildung der Klasse α von $A^* = F^{\alpha+1} \supset A$ erweitern; falls A ein F^α ($\alpha > 0$) ist, zu einer
Bl. 8 von X. |

Eine schlichte Abbildung $y = f(x)$ von A auf B heisst von der Klasse α, β, wenn f von der Klasse α und die inverse Funktion $x = g(y)$ von der Klasse β ist. D.h. $g(BF) = AF^\alpha$, $f(AF) = BF^\beta$.

Die Bezeichnungen F^α, G^α, H^α (zweiseitig) sollen sich jetzt allein auf *vollständige separable* Räume beziehen.

[8] *Eine Abbildung* α, β *von* A *auf* B ($A \subset X$, $B \subset Y$; X, Y separabel, vollständig) *lässt sich zu einer Abbildung* α, β *von* $A^* \supset A$ *auf* $B^* \supset B$ *erweitern, wo* A^* *ein* $F^{\alpha+\beta+1}$, B^* *ein* $F^{\beta+\alpha+1}$ *ist.*

Nach dem Erweiterungssatz giebt es ein $A_1 = F^{\alpha+1} \supset A$ und eine Erweiterungsfunktion $f_1(x)$ der Klasse α in A_1, ferner ein $B_1 = F^{\beta+1} \supset B$ und eine Erweiterungsfunktion $g_1(y)$ der Klasse β in B_1. Sei $I = \underset{x,y}{E}\,[y = f_1(x)]$, $K = \underset{x,y}{E}\,[x = g_1(y)]$; A^* und B^* die Projektionen von IK auf X, Y. A^* und B^* werden durch $y = f_1(x)$, $x = g_1(y)$ schlicht auf einander abgebildet, und zwar von der Klasse α, β, da $f_1(x)$ in A_1, also in $A^* \subset A_1$ von der Klasse α ist. I ist nach (I) in (A_1, Y) ein F^α, also ein $F^{\alpha+1}$ in (X, Y), K ein $F^{\beta+1}$. Die Projektion von IK auf X ist also ein $F^{\alpha+\beta+1}$ in A_1 oder in X, d.h.
Bl. 9 $A^* = F^{\alpha+\beta+1}$, $B^* = F^{\beta+\alpha+1}$. |

Bei einer Abbildung α, β *ist das Bild eines* F^α *ein* $F^{\beta+\alpha}$ ($\alpha > 0$).

Mit den bisherigen Bezeichnungen sei A ein F^α. Es ist dann für $f(x)$ keine Erweiterung nöthig, d.h. wir können $A_1 = A$ setzen, so dass I ein F^α in (A, Y) oder in (X, Y) wird. Zugleich wird $I \subset K$, $IK = I$, $A^* = A$, $B^* = B$. Die Projektion von IK auf Y ist jetzt ein $F^{\beta+\alpha}$ in B_1, also (für $\alpha > 0$) auch in Y, weil B_1 ein $F^{\beta+1}$ ist. Demnach ist $B^* = B = f(A)$ ein $F^{\beta+\alpha}$.

Bei einer Abbildung $\alpha, 0$ *ist das Bild eines* F^α *ein* F^α $(\alpha > 0)$.

Die F^α $(\alpha > 0)$ sind also nicht nur bei Homöomorphie (Abbildung $0,0$), sondern auch bei Abbildungen $\alpha, 0$ invariant.

Bei einer Abbildung $0, \beta$ *ist das Bild eines* F *ein* $F^{\beta+1}$. [9]

Denn F ist ein F^1 und die Abbildung eine Abbildung $1, \beta$, so dass wir den allgemeinen Fall mit $\alpha = 1$ vor uns haben. Wir werden sehen, dass umgekehrt jedes $F^{\beta+1}$ durch eine Abbildung $0, \beta$ aus einem geeigneten F (vollständigen separablen Raum) entsteht, so dass man das $F^{\beta+1}$ nicht zu F^β erniedrigen kann. | Bl. 10

13. 3. 37.

Zum Flg. vgl. Kuratowski, F. M. 22, p. 206–220. [10]

F_0 bedeute die 0-dimensionalen F (0-dimensionalen, separablen, abgeschlossenen Räume); sei sind mit den abgeschlossenen Teilmengen des Nullraums $\mathscr{N}$ homöomorph. Wir wollen zeigen: [11]

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & \text{Jedes } F^\alpha & (\alpha > 0) \\ \text{II.} & \text{Jedes } G^\alpha & (\alpha > 1) \\ \text{III.} & \text{Jedes } F^{\alpha+1} & (\alpha > 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{entsteht aus einem } F_0 \\ \text{durch eine Abbildung } 0, \alpha. \end{array}$$

I ist für $\alpha = 1$ richtig (lässt man in théorème S. 210 die Voraussetzung der Insichdichtkeit von X weg, so wird X $(0,1)$-Bild zwar nicht von $\mathscr{N}$, aber einer in $\mathscr{N}$ abgeschlossene Menge); für $\alpha > 1$ ist I wie II ein spezieller Fall von III.

Beweis. A) Wenn I_ξ für $1 \leqq \xi < \alpha$ richtig ist, ist II_α richtig.

G^α $(\alpha > 1)$ ist Summe disjunkter F^ξ $(\xi < \alpha)$ (Top. I, S. 162). Sei $B = \sum B_n$, B ein G^α, B_n ein F^{ξ_n} $(1 \leqq \xi_n < \alpha)$, die B_n disjunkt, alle im vollst[ändigen] sep[arablen] Raume Y gelegen. Es giebt also ein $X_n \,\varepsilon\, (F_0)$, von dem $B_n = f_n(X_n)$ $(0, \xi_n)$-Bild ist; wir nehmen die X_n disjunkt an und topologisieren (oder metrisieren) $X = \sum X_n$ so, dass die X_n in $X = \sum X_n$ abgeschlossen und offen sind; X ist ein F_0. Die Funktion $f(x)$, die in X_n gleich f_n ist, bildet X auf B schlicht und stetig ab; es ist zu zeigen, dass sie von der Klasse $0, \alpha$ ist. Ist G | in X offen, $f(G) = \sum_n f_n(X_n G)$, so ist $f_n(X_n G)$ ein G^{ξ_n} in $f_n(X_n) = B_n = F^{\xi_n}$, also von der Form $F^{\xi_n} G^{\xi_n}$ oder G^α, $f(G)$ ein G^α, q.e.d. [12] Bl. 11

[Übrigens ist auch für abgeschlossenes F $f_n(X_n F)$ ein $F^{\xi_n} F^{\xi_n} = F^{\xi_n}$ oder G^α und $f(F)$ ein G^α; $f(F)$ also in B gleichzeitig F^α, G^α, ebenso $f(G)$; die Funktion f^{-1} ist zweiseitig von der Klasse α, sagen wir: von der Klasse α^*; f von der Klasse $0, \alpha^*$.]

Für die weiteren Schritte ist folgender Prozess voranzuschicken. Es sei $X = (X_1, X_2, \dots)$ das Cartesische Produkt von endlich oder abzählbar vielen Räumen, so topologisiert oder metrisiert, dass die Mengen $(G_1, \dots, G_n, X_{n+1},$

$X_{n+1}, \dots)$ eine Basis von X bilden. Mit den X_n ist auch X ein F_0. Sodann sei $f_n(x_n)$ eine Abbildung von X_n in Y, $f_n(X_n) = Y_n$. Wir erhalten folgendermassen eine Abbildung $f(x)$ von $X_0 \subset X$ auf $Y_0 = \prod Y_n$. Es sei $(x = (x_1, x_2, \dots))$

$$X_0 = \underset{x}{E} [f_1(x_1) = f_2(x_2) = \dots]$$

und in X_0 $f(x) = f_1(x_1) = f_2(x_2) = \cdots$. Hier gilt folgendes:

(a) $f(X_0) = Y_0$

Bl. 12 und allgemeiner, wenn $A_n \subset X_n$, $f_n(A_n) = B_n$, | $A_0 = X_0 (A_1, A_2, \dots)$, $B_0 = \prod B_n$ gesetzt wird: $f(A_0) = B_0$ (für $A_n = X_n$ die erste Behauptung).

Denn $y \,\varepsilon\, f(A_0)$ heisst: es giebt ein $x \,\varepsilon\, A_0$ mit $y = f(x)$, also erstens $y = f_1(x_1) = f_2(x_2) = \cdots$ und zweitens $x_n \,\varepsilon\, A_n$, $y \,\varepsilon\, \prod B_n$. – Umgekehrt: $y \,\varepsilon\, \prod B_n$ heisst, dass für jedes n ein $x_n \,\varepsilon\, A_n$ mit $y = f_n(x_n)$ existiert, also erstens $x \,\varepsilon\, X_0$ und zweitens $x \,\varepsilon\, (A_1, A_2, \dots)$, also $y = f(x)$, $x \,\varepsilon\, A_0$, $y \,\varepsilon\, f(A_0)$.

(b) Sind die f_n schlicht, so auch f.

$$[f(x) = f(x')] = \prod_n [f_n(x_n) = f_n(x'_n)] \longrightarrow \prod_n [x_n = x'_n] = [x = x'] .$$

(c) Es sei $B_n \subset Y$ und $A_n = {f_n}^{-1}(B_n) = {f_n}^{-1}(Y_n B_n)$. Dann ist für jedes n

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_n) &= X_0 \underset{x}{E} [f_n(x_n) \,\varepsilon\, B_n] \\ &= X_0 \cdot (X_1, \dots, X_{n-1}, A_n, X_{n+1}, \dots) \\ &= X_0 P_n , \quad P_n = (X_1, \dots, X_{n-1}, A_n, X_{n+1}, \dots) \end{aligned}$$

und wenn wieder $B_0 = \prod B_n$, $A_0 = X_0 (A_1, A_2, \dots)$ gesetzt wird:

$$f^{-1}(B) = X_0 \cdot \prod_n P_n = A_0 .$$

Bl. 13 | Denn $x \,\varepsilon\, f^{-1}(B_n)$ heisst: $y = f(x) \,\varepsilon\, B_n$, $x \,\varepsilon\, X_0$, also $f_n(x_n) \,\varepsilon\, B_n$, $x_n \,\varepsilon\, A_n$, $x \,\varepsilon\, X_0 P_n$. – Umgekehrt: $x \,\varepsilon\, X_0 P_n$ heisst, dass $y = f(x) = f_1(x_1) = \cdots$ und $x_n \,\varepsilon\, A_n$, also $y = f_n(x_n) \,\varepsilon\, B_n$, $x \,\varepsilon\, f^{-1}(B_n)$.

(d) Sind die f_n von der Klasse α, so ist X_0 ein F^α in X und f in X_0 von der Klasse α. (Y separabel).

Wir betrachten zuerst die Abbildung $(y_1, y_2, \dots) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots)$ von X in $(Y, Y, \dots)$; sie ist von der Klasse α; bei dieser Abbildung ist X_0 das Urbild der in $(Y, Y, \dots)$ abgeschlossenen Menge, die durch $y_1 = y_2 = \cdots$ definiert ist, also ein F^α in X. Beschränkt man diese Abbildung auf X_0, so ist f daselbst von Klasse α. (Oder: man setze in (c) $B_1 = B_2 = \cdots = B_0 =$ abgeschlossen, dann ist A_n ein F^α in X_n, P_n eins in X, $\prod P_n$ eins in X, $f^{-1}(B)$ eins in X_0).

Sind insbesondere die f_n stetig, so ist X_0 in X abgeschlossen und f stetig.

(e) Sind die f_n von der Klasse $0, \alpha$, so ist f von der Klasse $0, \alpha$. (X_n separabel).

Wenn wir in (a) $A_1, \dots, A_n$ in $X_1, \dots X_n$ offen annehmen, hingegen $A_p = X_p$ für $p > n$, so sind $B_1, \dots B_n$ Mengen G^α in $Y_1, \dots Y_n$, | $B_p = Y_p$, und Bl. 14
das Bild von $X_0(A_1, \dots A_n, X_{n+1}, \dots)$ ist in $\prod Y_n = Y_0$ ein G^α, also, da diese Mengen eine Basis von X_0 bilden, das Bild jeder in X_0 offenen Menge ein G^α in Y_0, f^{-1} von der Klasse α.

(f) Sind die X_n nulldimensionale F, so auch X, X_0; entsteht Y_n aus X_n durch eine Abbildung $(0, \alpha)$, so auch $Y_0 = \prod Y_n$ aus X_0, d. h. die $(0, \alpha)$-Bilder nulldimensionaler F bilden ein δ-System.

Danach folgt III aus II und die Sätze I, II, III sind allgemein bewiesen, denn ist I_ξ für $1 \leqq \xi < \alpha$ richtig, so auch II_α, III_α und erst recht I_α. Also ist I für alle α richtig, ebenso II und III. *) [13]

IV. *In* $Y = F$ (separabel vollständig) *sei* B *ein* $H^{\alpha+\beta}$ ($\alpha > 0$). *Dann entsteht* Y *aus* $X \mathrel{\varepsilon} (F_0)$ *durch eine Abbildung* f *der Klasse* $0, \alpha$, *bei der* $f^{-1}(B) = A$ *ein* H^β *in* X *ist.* [14]

(Für $\beta = 1$ bereits Top. I, p. 229 unten; vgl. Lusin, Ens. Anal. p. 114).

$\boldsymbol{\beta = 0}$. B und $Y - B$ sind F^α und entstehen nach I aus Mengen $X_1, X_2 \mathrel{\varepsilon} (F_0)$ durch $B = f_1(X_1)$, $Y - B = f_2(X_2)$, Abbildungen $0, \alpha$. Wir nehmen X_1, X_2 disjunkt, in $X = X_1 + X_2$ zugleich offen | und abgeschlossen; wie Bl. 15
beim Beweis von (A) ergiebt sich f ($= f_1, f_2$ in X_1, X_2) von der Klasse $0, \alpha$, $f(X) = Y$, X ein F_0; $f^{-1}(B) = X_1$ in X ein H^0 (abgeschlossen und offen).

Schluss von γ *auf* $\beta = \gamma + 1$. B ist von der Form $B = \mathtt{lim}\, B_n$, wo die B_n Mengen $H^{\alpha+\gamma}$ sind und also Abbildungen f_n der Klasse $0, \alpha$ von X_n ($\mathrel{\varepsilon} (F_0)$) auf Y existieren, bei denen $A_n = {f_n}^{-1}(B_n)$ in X_n ein H^γ ist. Mit den Bezeichnungen von (c) ist P_n ein H^γ in X, $X_0 P_n$ eins in X_0; zugleich ist $X_0 \mathrel{\varepsilon} (F_0)$ und $f(X_0) = Y$ (weil $Y_n = Y$). Wegen der Schlichtheit ist $f^{-1}(B) = \mathtt{lim}\, X_0 P_n$ und diese Menge ein $H^{\gamma+1}$ in X_0. [15]

Schluss von $\gamma < \beta$ *auf Limeszahl* β. B und $Y - B$ sind $F^{\alpha+\beta}$ und also von der Form $B = \prod B_{2n}$, $Y - B = \prod B_{2n-1}$, die B_n Mengen $H^{\alpha+\gamma_n}$ ($\gamma_n < \beta$). Wie soeben giebt es Abbildungen f_n der Klasse $0, \alpha$ von $X_n \mathrel{\varepsilon} (F_0)$ auf Y, bei denen $f^{-1}(B_n) = X_0 P_n$ ein H^{γ_n} in X_0 ist; $f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(Y - B)$ sind gleichzeitig von der Form $\prod H^{\gamma_{2n}}, \prod H^{\gamma_{2n-1}} = F^\beta$, $f^{-1}(B)$ ein H^β in X_0. | Bl. 16

*) Folgerungen (mit Hülfe des Theorems von Mazurkiewicz): Ein unabzählbares $F^{\alpha+1}$ ($\alpha > 0$) $\approx$ abzählbare Menge plus $(0, \alpha)$-Bild von $\mathscr{N}$. $X = F^{\alpha+1}$, $Y = F^{\beta+1}$ unabzählbar ($\alpha, \beta > 1$): Y entsteht aus X durch (α, β)-Abbildung.

Besonderer Fall ($\beta = 1$). B ein $H^{\alpha+1}$ ($\alpha > 0$), Y entsteht aus X durch eine Abbildung f der Klasse $(0, \alpha)$, bei der $A = f^{-1}(B)$ ein H^1, also zugleich F_σ, G_δ ist. Demnach ist $A = \sum\limits_\xi (F_{2\xi} - F_{2\xi+1})$ abzählbare Differenzenkette abgeschlossener Mengen und $f(A) = \sum\limits_\xi [f(F_{2\xi}) - f(F_{2\xi+1})]$ abzählbare Differenzenkette aus Mengen F^α. Die $H^{\alpha+1}$ sind also Differenzenketten aus Mengen F^α (auch für $\alpha = 0$, wo der Raum X mit Y als identisch angenommen werden kann und in diesem Falle nicht mehr 0-dimensional zu sein braucht.)

[16] V. (in IV werden die H durch F ersetzt) In $Y = F$ sei B ein $F^{\alpha+\beta}$ ($\alpha > 0$). Dann entsteht Y aus $X \,\varepsilon\, (F_0)$ durch eine Abbildung f der Klasse $0, \alpha$, bei der $A = f^{-1}(B)$ ein F^β in X ist. (Ebenso, mit Komplementbildung, können $F^{\alpha+\beta}$, F^β durch $G^{\alpha+\beta}$, G^β ersetzt werden.)

B $(= F^{\alpha+\beta}) = \prod B_n$, B_n ein $H^{\alpha+\beta}$; man hat dann Abbildung f_n der Klasse $0, \alpha$ mit $f_n(X_n) = Y$, $A_n = {f_n}^{-1}(B_n) = H^\beta$ in X_n, und mit den bekannten Bezeichnungen ist $X_0 P_n$ ein H^β in X_0, $f^{-1}(B) = \prod X_0 P_n$ ein
Bl. 17 F^β in X_0. |

Es giebt für jedes Paar von Ordnungszahlen α, β ($< \Omega$) eine Abbildung f von $\mathscr{N}$ auf $\mathscr{N}$, die genau von der Klasse α, β ist (d. h. f nicht von einer Klasse $< \alpha$, f^{-1} nicht von einer Klasse $< \beta$).

[17] (Beweis: mein Ms. Die Borelschen Mengen und der Nullraum, (18)).

17. 4. 37

Folgerung aus V: (für $\beta = 2$)

> *Jede Menge* $F^{\alpha+2} = F^\alpha_{\sigma\delta}$ ($\alpha > 0$) *ist als oberer Limes einer Folge von Mengen* F^α *darstellbar.*

Denn sie entsteht, bei einer Abbildung f der Klasse $0, \alpha$ des nulldimensionalen Raumes X auf Y, aus einer Menge $A = F^2 = F_{\sigma\delta}$. Nun hat der nulldimensionale Raum eine abzählbare Basis aus Mengen H, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind; jede offene Menge ist Summe abzählbar vieler disjunkter H, jede Menge der Form $FG = F - F'$ und jede Menge der Form $F_\sigma = F_1 + F_2 + \cdots = F_1 + (F_2 - F_1) + \cdots$ ($F_1 \subset F_2 \subset \cdots$) Summe disjunkter abgeschlossener Mengen. Eine Menge A der Form $F_{\sigma\delta}$ ist dann als $\overline{\mathtt{lim}}\, F_n$ darstellbar; denn sei $A = PQR \cdots$, $P \supset Q \supset R \cdots$, $P = \sum P_n$, $Q = \sum Q_n$, $R = \sum R_n$, ... Mengen F_σ mit disjunkten abgeschlossenen Summenden $P_n, Q_n, R_n, \ldots$. So ist A der obere Limes L des Mengensystems $P_n, Q_n, R_n, \ldots$ (es ist nur $L \subset A$ zu beweisen; da $x \,\varepsilon\, L$ höchstens
Bl. 18 *einem* P_n, *einem* Q_n,... | angehört, so gehört x unendlich vielen der Mengen $P, Q, R, \ldots$ und, wegen $P \supset Q \supset R \ldots$, allen an: $x \,\varepsilon\, A$). Wir haben also $A = \overline{\mathtt{lim}}\, F_n$, wegen der Schlichtheit der Abbildung $B = \overline{\mathtt{lim}}\, f(F_n)$, und die $f(F_n)$ sind Mengen F^α.

Es bliebe also (für vollständige separable Räume) nur zweifelhaft, ob (für $\alpha = 0$) $F_{\sigma\delta}$ stets als $\overline{\mathtt{lim}}\, F_n$ darstellbar ist. (Rein mengentheoretisch ist zwar für Ringe (A) bekannt, dass die Mengen $\texttt{lim}\,A_n$ mit denen identisch sind, die gleichzeitig $A_{\sigma\delta}$, $A_{\delta\sigma}$ sind; die Mengen $\overline{\texttt{lim}}\,A_n$, $\underline{\texttt{lim}}\,A_n$ sind resp. $A_{\sigma\delta}$, $A_{\delta\sigma}$, ob aber auch umgekehrt, ist unbekannt.) Dass aber diese Frage (für beliebige metrische Räume) zu bejahen ist, hat bereits Sierpiński bewiesen (Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$, Fund. Math. 6 (1924), p. 21 – 23). Die rein mengentheoretische Frage, ob für einen Ring (A) die $A_{\sigma\delta}$ mit den $\overline{\texttt{lim}}\,A_n$ identisch sind (schon ob $\overline{\texttt{lim}}\,A_n$ wieder einen Ring bilden), ist noch offen. (Sie ist zu verneinen, Kozniewski). [18]

Anmerkungen

[1] Die Definition einer B-meßbaren Funktion der Klasse α wird in [Ku 1933/1966], § 31.I gegeben. Das Konzept geht auf Lebesgue zurück. Eine *fonction mesurable B* ist in [Lb 1905], S. 166 definiert als eine reelle Funktion f, für die alle f-Urbilder abgeschlossener Intervalle von $\mathbb{R}$ *ensembles mesurables B*, d. h. Borelsche Mengen sind.

[2] Das Resultat ist aus [Ku 1933/1966], § 31.V. Der nichtseparable Fall wurde in zwei Arbeiten von Montgomery (S. 527–533) und Kuratowski (S. 534–545) in Fundamenta Math. **25** (1935) behandelt. Ein entfernter Vorläufer dieses Resultats ist Theorem XX in [Lb 1905], S. 166, welches besagt, daß eine Funktion von n Variablen, welche in bezug auf jede dieser Variablen stetig ist, höchstens von der Klasse n ist.

[3] Das Resultat ist aus [Ku 1933/1966], § 31.VI.

[4] Das Resultat ist aus [Ku 1933/1966], § 31.VII; der erste Teil ist jedoch dem Satz VII im § 43 der *Mengenlehre* ziemlich ähnlich.

[5] Dies ist Hausdorffs eigenes Resultat aus der Arbeit [H 1924] (s. diesen Band, S. 443–453). Hausdorff gibt hier einen ganz wesentlich vereinfachten Beweis (s. dazu auch Anm. [110] zu *Mengenlehre*).

[6] Dies bezieht sich auf Lavrentieffs Arbeiten [Lv 1924a], [Lv 1924b] (s. Anm. [111] zu *Mengenlehre*.

[7] Das Manuskript vom 4. 3. 1937 ist der vorstehend abgedruckte Fasz. 618.

[8] Der Satz steht bei Kuratowski ([Ku 1933/1966], § 35.VII). Der Beweis benutzt dieselbe Methode wie in Lavrentieffs Theorem der Erweiterung von Homöomorphismen, nämlich sowohl f als auch die inverse Funktion f^{-1} simultan zu erweitern.

[9] Die genaue Bedeutung dieser Behauptung ist folgende: Angenommen A, B sind Mengen in polnischen Räumen X, Y und $f : A \to B$ ist eine bijektive Abbildung der Klasse $(0, \beta)$ (im Sinne der relativen Topologien von

A und B). *Ist dann A abgeschlossen in X, so ist B ein $\mathbf{F}^{\beta+1}$ in Y.* Es sei noch folgendes bemerkt: Ist $f : X \to Y$ eine $(0,\beta)$-Abbildung von X auf Y und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ergibt sich unmittelbar aus der Definition, daß die Menge $f(A) = B$ sogar ein $\mathbf{F}^{\beta}$ in Y ist.

Diese Bemerkung ist gleichermaßen anzuwenden auf zwei ähnliche Behauptungen einige Zeilen darüber und auf die Aussagen I, II, III und andere ähnliche Behauptungen weiter unten.

[10] HAUSDORFF verweist hier auf [Ku 1934]. Die Bezeichnung F_0 für die abgeschlossenen Mengen des Baireschen Raumes $\mathscr{N}$ stammt von HAUSDORFF. In [Ku 1933/1966] bezeichnet F_0 die abgeschlossenen Mengen in einem beliebigen Raum; in [Ku 1934] kommt die Bezeichnung F_0 überhaupt nicht vor.

[11] Die Aussage III, das Hauptergebnis hier, kommt einigen Resultaten in [Ku 1934] und [Ku 1933/1966] nahe und ist auch für $\alpha = 1$ richtig. Die Aussage I für $\alpha = 1$ ist im wesentlichen schon in *Mengenlehre* bewiesen (s. u., Kommentar zu Fasz. 619).

[12] [Ku 1933/1966], § 29.V.

[13] Zur Fußnote: MAZURKIEWICZ hat in [Ma 1916] bewiesen, daß jede überabzählbare $\mathbf{G}_\delta$-Menge des Baireschen Raumes $\mathscr{N}$ nach Entfernung einer geeigneten abzählbaren Menge zu $\mathscr{N}$ homöomorph wird.

[14] Das Resultat ist Theorem 2 in [Ku 1934]; in [Ku 1933/1966] ist es nur für $\beta = 1$ (als Teil von Theorem 1 in § 37.II) enthalten. Das LUSINsche Ergebnis, welches einige Zeilen weiter unten zitiert wird, bezieht sich nur auf den Fall, daß Y selbst der Bairesche Raum ist.

[15] Die Argumentation beinhaltet folgendes: Die Klasse $\mathbf{H}^{\alpha+1}$ besteht aus allen Limites (konvergenter) Folgen von Mengen aus $\mathbf{H}^{\alpha}$ (s. bezüglich dieses Theorems Anm. [2] zu Fasz. 1064 im Abschnitt 2).

[16] Theorem 3 in [Ku 1934].

[17] HAUSDORFF zitiert hier den im folgenden abgedruckten Fasz. 620.

[18] Die Bemerkung in Klammern hat HAUSDORFF mit andersfarbigem Stift (offenbar später) hinzugefügt. A. KOŹNIEWSKI (und unabhängig von ihm HAUSDORFF) haben bewiesen, daß für einen gewissen Ring (A) die Klasse aller Mengen der Form $\overline{\mathtt{lim}}\, A_n$, $A_n \in (A)$, ein echter Teil der Klasse $(A_{\sigma\delta})$ und nicht einmal ein Ring ist (s. im Abschnitt 2. Fasz. 633 und den zugehörigen Kommentar).

NL Hausdorff : Kapsel 40 : Fasz 620
Die Borelschen Mengen und der Nullraum
Hs. Ms. - [Bonn], 7.–16. 3. 1937. - 18 Bll.[3]

7. 3. 37

Die Borelschen Mengen und der Nullraum

(Es handelt sich hier um Borelsche Mengen F^α, G^α in *separablen vollständigen* Räumen; z. B. $F =$ separabel, vollständig, $F^1 = G_\delta$ = separabel, topologisch vollständig. Ebenso um analytische Mengen in separablen vollständigen Räumen).

(1) Das stetige Bild einer analytischen Menge ist analytisch, das schlichte stetige Bild einer Borelschen ist Borelsch (Mengenlehre S. 209).

(2) Jede analytische Menge ist stetiges Bild des Nullraums $\mathscr{N}$, jede Borelsche schlichtes stetiges Bild einer in $\mathscr{N}$ abgeschlossenen Menge (ib. S. 211).

(3) Jedes 0-dimensionale G_δ ist mit einer in $\mathscr{N}$ abgeschlossenen Menge homöomorph. (Kuratowski, Top. I, S. 224, théorème 2). [1]

(4) X sei 0-dimensionales G_δ, $A \subset X$ und $B = X - A$ in X dicht, A ein G_δ: dann ist A mit $\mathscr{N}$ homöomorph. (ib. S. 225, théorème 3 von Mazurkiewicz). *)

(5) Jedes in $\mathscr{N}$ dichte G_δ ist mit $\mathscr{N}$ homöomorph.

Beweis. Das Cantorsche Diskontinuum X ist in $\mathscr{N} + D$ zerlegbar, wo $\mathscr{N}$ topologisch der Nullraum, D abzählbar, $\mathscr{N}$ und D in X dicht sind. | (Beweis. Bl. 2
Vgl. Mengenlehre p. 182. X ist der dyadische Bairesche Raum der Folgen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $\xi_n = 0$ oder 1. D sei die Menge der x mit nur endlich vielen $\xi_n = 1$, $\mathscr{N} = X - D$. Jedem $x \,\varepsilon\, \mathscr{N}$ entspricht eineindeutig eine Folge $\nu = (n_1, n_2, \ldots)$ natürlicher Zahlen, derart dass $\xi_n = 1$ für n_1, $n_1 + n_2$, $n_1 + n_2 + n_3, \ldots$. Diese Beziehung ist beiderseitig stetig, also $\mathscr{N}$ topologisch der Nullraum.) Ist nun A in $\mathscr{N}$ dichtes G_δ, so auch in X, während $X - A = (\mathscr{N} - A) + D$ ebenfalls in X dicht ist; nach (4) ist A mit $\mathscr{N}$ homöomorph.

(6) Jedes 0-dimensionale unabzählbare G_δ ist = abzählbare Menge plus topologischem Bild von $\mathscr{N}$. (Kuratowski, Top. S. 227, IV 1). [2]

(7) Jedes insichdichte G_δ ist schlichtes stetiges Bild von $\mathscr{N}$ und zwar vermöge einer Abbildung $0, 1$. (Kuratowski, F. M. 22, S. 210).

(8) Jedes $H^{\alpha+1}$ ($\alpha > 0$) entsteht aus einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathscr{N}$ durch eine Abbildung $0, \alpha$. (Top. S. 231, Cor. 1). [3]
Verschärfung: (F. M. 22, Th. 1, S. 215).

---

[3] Fasz. 620 ist im Faksimile abgedruckt in [H 1969], Band 2, S. 273–291.

*) Ein 0-dimensionales insichdichtes G_δ X braucht nicht mit $\mathscr{N}$ homöomorph zu sein; Beispiel: X = Cantorsches Diskontinuum. Andererseits ist jede mit $\mathscr{N}$ homöomorphe Menge 0-dimensionales insichdichtes G_δ.

(9) Jedes $F^{\alpha+1}$ ($\alpha > 0$) entsteht aus einer abgeschlossenen Teilmenge von
Bl. 3 $\mathscr{N}$ vermöge einer Abbildung $0, \alpha$. |

(Für eine Limeszahl α entsteht F^α, welches ja $F^{\alpha+1}$ ist, auch aus einer in $\mathscr{N}$ abgeschlossenen Menge durch eine Abbildung $0, \alpha$.

[Umgekehrt: bei einer Abbildung α, β mit $\alpha > 0$ ist das Bild eines F^α ein $F^{\beta+\alpha}$. Hieraus folgt für $\alpha = 1$, dass das Bild eines F^1 oder F bei Abbildung $1, \beta$ oder $0, \beta$ ein $F^{\beta+1}$ ist].

[4] In der Fassung des th. 1, F. M. 22, S. 215 ist also für $\alpha =$ Limeszahl die Behauptung „il suffit" falsch, denn durch $0, \alpha$ kann ja aus F ein $F^{\alpha+1}$ entstehen, das kein F^α ist.)

Wir wollen feststellen, wann die Borelschen Mengen schlichte stetige Bilder von $\mathscr{N}$ selbst sind. Sie müssen *verdichtet* sein, und diese Bedingung wird sich auch als hinreichend erweisen (wie bei (7) im Fall der G_δ, bei denen ja insichdicht = verdichtet ist).

(10) Y sei topologisch vollständig (nicht notwendig separabel), insichdicht. Jeder Punkt y gehört $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ perfekten Mengen Q an, die paarweise nur y gemein haben.

Zunächst ist y Punkt eines dyadischen Diskontinuums D (Mengenlehre, S. 137; man kann bei der dyadischen Kugelkonstruktion $V_p, V_{pq}, \ldots$ y als Mittelpunkt von $V_0, V_{00}, \ldots$ wählen). Lassen wir die Polarkoordinaten r, φ in der Ebene die Cantorsche Menge der Zahlen

$$2\left(\frac{p}{3} + \frac{q}{3^2} + \cdots\right)$$

Bl. 4 | durchlaufen, so entsteht eine kompakte perfekte diskontinuierliche Menge, die mit D homöomorph ist, wobei wir den Punkt y dem Mittelpunkt $r = 0$ entsprechen lassen können; die Radien $\varphi = \text{const}$. liefern dann $\mathfrak{c}$ perfekte Mengen, die nur den Mittelpunkt gemein haben.

(11) $f(x)$ sei eine schlichte stetige Abbildung von X in Y (beide Räume F oder G_δ), $B = f(X)$; es sei $y \,\varepsilon\, B_\gamma - B$ (B_γ die Menge der Verdichtungspunkte von B). Dann giebt es eine perfekte Menge Q, $y \,\varepsilon\, Q \subset B + y$, deren Urbild $P = f^{-1}(Q) = f^{-1}(BQ) = f^{-1}(Q - y)$ in X nirgendsdicht ist.

Zunächst giebt es eine perfekte Menge Q_0, $y \,\varepsilon\, Q_0 \subset B + y$. Denn seien V_n Umgebungen von y mit Durchmessern $\to 0$; BV_n als unabzählbare Borelsche Menge enthält eine perfekte Menge Q_n, und $Q_0 = \sum Q_n + y$ leistet das Verlangte. Q_0 enthält nach (10) $\mathfrak{c}$ perfekte Mengen Q, die paarweise nur y gemein haben; ihre in X abgeschlossenen Urbilder $P = f^{-1}(Q - y)$ sind disjunkt und nur abzählbar viele P können innere Punkte haben; es giebt also gewiss ein P ohne inneren Punkt, d. h. ein nirgendsdichtes.

(12) Wie bei (11) sei $D \subset B_\gamma - B$, D abzählbar; dann giebt es eine Menge $Q = F_\sigma$ (Summe perfekter Mengen) mit $D \subset Q \subset B + D$, deren Urbild $P = f^{-1}(Q) = f^{-1}(BQ) = f^{-1}(Q - D)$ in X ein F_σ von 1. Kategorie ist. | Bl. 5

Das folgt, wenn man für jedes $y_n \varepsilon D$ gemäss (11) eine perfekte Menge Q_n mit $y_n \varepsilon Q_n \subset B + y_n$ bildet und $Q = \sum Q_n$ setzt.

Setzen wir $C = B + D$. Wir haben dann $f(P) = Q - D$ und die Zerlegung in disjunkte Summanden $C = f(X - P) + f(P) + D = f(X - P) + Q$.

(13) X sei der Nullraum, $f(x)$ eine Abbildung der Klasse $0, \alpha$ in Y (vollständig, separabel), $B = f(X)$, also B verdichtet ($B \subset B_\gamma$), ferner $D \subset B_\gamma - B$ abzählbar. Dann entsteht für $\alpha > 1$ auch $C = B + D$ aus dem Nullraum durch eine Abbildung $0, \alpha$.

(Man kann die Voraussetzungen auch so ausdrücken: $C \supset B$, $C - B = D$ abzählbar, C verdichtet. Denn $C_\gamma = B_\gamma$, $C \subset C_\gamma$ ist mit $C \subset B_\gamma$ oder $D \subset B_\gamma - B$ gleichbedeutend.)

Wir haben $C = Q + f(X - P)$. Q, Summe perfekter Mengen, entsteht aus dem Nullraum X durch eine Abbildung $0, 1$. Das geht, wenn Q selbst perfekt ist, aus (7) hervor. Andernfalls sei $Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$ ($Q_1 \subset Q_2 \subset \cdots$, Q_n perfekt, $Q_n - Q_{n-1} \neq 0$) und X_n das in X offene und abgeschlossene Intervall der mit $\xi_1 = n$ beginnenden $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. $Q_n - Q_{n-1}$ ist ein G_δ, insichdicht | (weil in Q_n offen) und nach (7) $Q_n - Q_{n-1} = f_n(X_n)$, wo f_n von der Klasse $0, 1$ ist; die in $X = \sum X_n$ durch $f(x) = f_n(x)$ für $x \varepsilon X_n$ definierte schlichte stetige Funktion bildet X auf $f(X) = Q$ ab und ist von der Klasse $0, 1$. (Ist G in X offen, so ist $f_n(X_n G)$ ein F_σ in $Q_n - Q_{n-1}$, also, da auch $Q_n - Q_{n-1}$ ein F_σ ist, eins in Q, sogar in Y.) Bl. 6

$X - P$ ist in X dichtes G_δ, also nach (5) mit X homöomorph, und $f(X - P) = C - Q$ geht also auch aus X durch eine Abbildung $0, \alpha$ hervor. ($f(x|X - P)$ ist von der Klasse $0, \alpha$; das Bild einer in $X - P$ abgeschlossenen Menge $F(X - P)$ ist $f(F) f(X - P) = F^\alpha \cdot (C - Q)$).

Wenn wir nun etwa die beiden Intervalle X_1, X_2 nehmen, deren Summe wieder ein Nullraum ist, so haben wir

$$Q = f_1(X_1), \quad C - Q = f_2(X_2).$$

Das Bild einer in $X_1 + X_2$ abgeschlossenen Menge $F_1 + F_2$ bei der Abbildung f, die in X_1, X_2 resp. gleich f_1, f_2 ist, ist

$$QF^1 + (C - Q)F^\alpha.$$

Hierbei ist $QF^1 = F_\sigma G_\delta$ für $\alpha > 1$ ein F^α (in Y oder C) und $(C - Q)F^\alpha = CG_\delta F^\alpha$ ein CF^α, also ist C aus $X_1 + X_2$ durch eine Abbildung $0, \alpha$ entstanden. | Bl. 7

(14) Ist C ein unabzählbares $F^{\alpha+1}$ $(\alpha > 0)$, so entsteht sie nach (9) aus einer in $\mathscr{N}$ abgeschlossenen Menge A durch eine Abbildung f der Klasse $0, \alpha$, während A nach (6) gleich abzählbare Menge plus homöomorphes Bild von $\mathscr{N}$ wird, also $C = D + B$, D abzählbar, B Bild von $\mathscr{N}$ mittels $0, \alpha$. (F. M. 22, S. 216, Cor. 1).

Wir können jetzt nach (13) hinzufügen:

[5] *Ist C verdichtetes $F^{\alpha+1}$ $(\alpha > 1)$, so ist C Bild von $\mathscr{N}$ vermöge einer Abbildung $0, \alpha$.*

Die notwendige Bedingung für die schlichten stetigen Bilder von $\mathscr{N}$, verdichtete Borelsche Mengen zu sein, ist also auch hinreichend.

Die verdichteten $F^2 = F_{\sigma\delta}$ ergeben sich hier (da sie F^3 sind), als Bilder von $\mathscr{N}$ vermöge $0, 2$; es wäre zu prüfen, ob sie nicht doch schon durch $0, 1$ entstehen. Die verdichteten $F^1 = G_\delta$ entstehen aus $\mathscr{N}$ durch $0, 1$ gemäss (7). Wir haben also: verdichtetes F^1 ist (0,1)-Bild von $\mathscr{N}$. (0,1)-Bild von $\mathscr{N}$ ist verdichtetes F^2. Verdichtetes F^2 ist (0,2)-Bild von $\mathscr{N}$. (0,2)-Bild von $\mathscr{N}$ ist verdichtetes F^3 und umgekehrt. Also, wenn P^α verdichtetes F^α bedeutet und $\mathscr{N}^\alpha$ $(0, \alpha)$-Bild von $\mathscr{N}$:

$$(P^1) \subset (\mathscr{N}^1) \subset (P^2) \subset (\mathscr{N}^2) = (P^3)\,;$$

die Frage ist, ob nicht bereits $(\mathscr{N}^1) = (P^2)$ ist.

Ist C verdichtetes G^α $(\alpha > 0)$, so ist C Bild von $\mathscr{N}$ vermöge einer Abbildung $0, \alpha$.

Da C ein $F^{\alpha+1}$ ist, so ist für $\alpha > 1$ die Behauptung unmittelbare Folge der
Bl. 8 vorigen. Für $\alpha = 1$, wo C ein F_σ ist, beweisen wir | zunächst wie in (11), dass jedes $y \,\varepsilon\, C$ in einer perfekten Menge $\subset C$ liegt; ist sodann $C = \sum F_n$, Q_n der perfekte Kern von F_n, $B = \sum Q_n$, so ist $C - B = D$ höchstens abzählbar, und wenn wir zu jedem Punkt von D eine ihn enthaltende perfekte Menge bilden, so ergiebt sich C als Summe *perfekter* Mengen; für diese C haben wir bei (13) gesehen, dass sie aus $\mathscr{N}$ durch Abbildungen 0, 1 entstehen.

10. 3. 37

Die Aussage über die G^α ist an sich ungünstiger als die über die F^α und lässt sich nicht dahin verschärfen, dass jedes verdichtete $G^{\alpha+1}$ aus $\mathscr{N}$ durch eine Abbildung $0, \alpha$ entsteht; sonst müsste (da das Bild von $\mathscr{N}$ vermöge $0, \alpha$ jedenfalls $F^{\alpha+1}$ ist) jedes (verdichtete) $G^{\alpha+1}$ ein $F^{\alpha+1}$ sein. Dagegen lässt sich in anderer Weise eine Verfeinerung (17) erzielen. Es scheint, dass der Weg über (15), (16) dazu unnötig ist (nachdem man einmal weiss, s. mein Ms. Borelsche Funktionen, Satz II, dass jedes G^α $(\alpha > 1)$ aus einem F_0 durch
[6] eine Abb[ildung] $(0, \alpha^*)$ entsteht). Denn in (13) kann man statt Abbildung $0, \alpha$ auch $(0, \alpha^*)$ setzen.

(15) Jedes G^α $(\alpha > 1)$ ist Summe disjunkter F^ξ $(\xi < \alpha)$.

Zunächst ist $C = G^\alpha$ $(\alpha > 0)$ Summe von F^ξ $(\xi < \alpha)$, die wir aufsteigend annehmen können:

$$C = \sum C_n \quad (C_1 \subset C_2 \subset \cdots), \quad C = \sum (C_n - C_{n-1});$$

$C_n - C_{n-1}$ als $F^{\xi_1} G^{\xi_2}$ ist jedenfalls H^α (zweiseitig). Weiter ist dann G^{ξ_2}, wobei im Fall $\alpha > 1$ $\xi_2 > 0$ angenommen werden kann, Summe disjunkter H^{ξ_2} und $F^{\xi_1} G^{\xi_2}$ Summe disjunkter $F^{\xi_1} H^{\xi_2}$, die jedenfalls F^ξ mit $\xi < \alpha$ sind. (Kuratowski, Top. S. 162) | [7]

Bl. 9

(16) Jedes verdichtete G^α $(\alpha > 1)$ ist Summe disjunkter verdichteter F^ξ $(\xi < \alpha)$.

Es sei $C = \sum C_n$ Summe disjunkter F^ξ $(\xi < \alpha)$. Allgemein sei B_γ Menge der Verdichtungspunkte von B und $B_v = BB_\gamma$ Menge der zu B gehörigen Verdichtungspunkte; $B - B_v$ ist abzählbar. (Der Raum Y sei vollständig, separabel). C sei verdichtet;

$$V = \sum_n C_{n\gamma} = \sum_n V_n \subset C_\gamma, \quad V_n = C_{n\gamma} - \sum_{m<n} C_{m\gamma}.$$

Wir setzen jetzt, wenn D irgend eine abzählbare Menge $\subset C$ ist,

$$B_n = C_n(Y - DV) + DV_n;$$

die beiden Summanden hierin sind disjunkt; die sämtlichen B_n sind disjunkt und ihre Summe

$$\sum B_n = C(Y - DV) + DV = (C - DV) + DV = C.$$

Die Mengen B_n entstehen aus den C_n durch Weglassung und Hinzufügung einer abzählbaren Menge; im Fall $\alpha = 2$, wo man die C_n als $F^1 = G_\delta$ annehmen kann, sind sie von der Form G_δ plus abzählbare Menge; indem wir diesen Fall nachträglich behandeln und zunächst $\alpha > 2$ annehmen, wo die C_n als F^ξ mit $\xi \geq 2$ angenommen werden können, sind die B_n von der Form $F^\xi \cdot G_\delta + F_\sigma = F^\xi$. Da $B_{n\gamma} = C_{n\gamma}$, wird

$$B_{nv} = C_{nv}(Y - DV) + DV_n \quad (V_n C_{n\gamma} = V_n),$$

$$B_n - B_{nv} = (C_n - C_{nv})(Y - DV).$$

| Wenn insbesondere $D = \sum (C_n - C_{nv})$ gesetzt wird, ist Bl. 10

$$\sum (B_n - B_{nv}) = D(Y - DV) = D(Y - V).$$

Wir haben also jetzt $C = \sum B_n$ mit disjunkten $B_n = F^\xi$, und $E = \sum (B_n - B_{nv})$ ist zu $V = \sum_n B_{n\gamma}$ disjunkt. Jeder Punkt $y \in E$ hat demnach, wie gross auch n und wie klein $\delta > 0$ sei, eine Umgebung U vom Durchmesser $< \delta$, die mit $B_1 + \cdots + B_n$ nur abzählbaren Durchschnitt hat; da er aber Verdichtungspunkt von C und also CU unabzählbar ist, muss ein B_pU mit $p > n$ unabzählbar sein, ebenso $B_{pv}U$, und diese Menge enthält also eine perfekte Menge Q_p. Indem wir die Punkte von E in eine Folge bringen, worin jeder Punkt unendlich oft vorkommt, erhalten wir eine Folge perfekter Mengen $Q_{n_\nu} \subset (B_{n_\nu})_v$ mit Durchmessern $\to 0$ und $n_1 < n_2 < \cdots$, derart, dass zu jedem y eine nach ihm konvergente Folge $Q_\alpha, Q_\beta, \ldots$ existiert; $Q_\alpha + Q_\beta + \cdots + y = Q_y$ ist dann wieder perfekt. Setzen wir noch für die $n \neq n_\nu$ $\quad Q_n = 0$, so wird

$$C = \sum_n (B_{nv} - Q_n) + \sum_y Q_y \,.$$

Alle Summanden sind disjunkt, alle verdichtet ($B_{nv} - Q_n$ ist in B_{nv} offen),
Bl. 11 alle sind F^ξ (B_{nv}, in B_n abgeschlossen, ist F^ξ; $B_{nv} - Q_n$ desgleichen; Q_y ist perfekt). Für $\alpha > 2$ ist damit die Behauptung bewiesen.

Für $\alpha = 2$ ergeben sich die $B_{nv} - Q_n$ nicht als F^1, sondern als G_δ plus abzählbare Menge, und um die Behauptung auch hier aufrechtzuerhalten, ist zu zeigen: eine verdichtete Menge $C = B + D$, wo B ein G_δ und D abzählbar ist, ist Summe disjunkter verdichteter G_δ. B ist verdichtet, und wie bei (11) können wir jeden Punkt y_n von D in eine perfekte Menge $Q_n \subset B + y$ einschliessen, von der wir diesmal voraussetzen dürfen, dass $BQ_n = Q_n - y$ in B nirgendsdicht ist. Wir erhalten dann mit $\sum Q_n = Q$: $C = (B - Q) + Q$, und $B - Q$ ist, weil BQ in B von 1. Kategorie ist, noch in B dicht, also verdichtetes G_δ; Q ist Summe von Mengen

$$Q_n - \sum_{m<n} Q_m \,,$$

die ebenfalls, (falls $\neq 0$) verdichtete G_δ sind. Also ist (16) auch für $\alpha = 2$ richtig.

Nunmehr lautet die angekündigte Verfeinerung:

(17) Jedes verdichtete $C = G^\alpha$ ($\alpha > 1$) ist schlichtes stetiges Bild von $\mathscr{N}$ vermöge einer Abbildung f, die nicht nur von der Klasse $0, \alpha$, sondern deren Inverse f^{-1} zweiseitig von der Klasse α ist, d.h. das Bild $f(F)$
Bl. 12 einer in $\mathscr{N}$ abgeschlossenen Menge ist in C gleichzeitig F^α und G^α.

Es sei $C = \sum C_n$, die C_n disjunkte verdichtete F^{ξ_n}, wo $\xi_n \geq 1$ angenommen werden kann. Ein verdichtetes F^ξ mit $\xi \geq 1$ entsteht aus $\mathscr{N}$ jedenfalls durch eine Abbildung $0, \xi$; für $\xi = 1$ ist das die Aussage von (7), für $\xi > 1$ folgt es reichlich aus (14), da F^ξ ein $F^{\xi+1}$ ist. Demnach sei $C_n = f_n(X_n)$, f_n von der Klasse $0, \xi_n$; X_n das Intervall $(n, \ldots)$ des Nullraums $X = \sum X_n$; $C = f(X)$; $f = f_n$ in X_n. Ist F in X abgeschlossen, so ist $f_n(X_nF) = C_nF^{\xi_n} = F^{\xi_n}$, $f(F)$ von der Form $\sum F^{\xi_n} = G^\alpha$. Ist G in X offen, so ist $f_n(X_nG) = C_nG^{\xi_n} = F^{\xi_n}G^{\xi_n}$ ein G^α, $f(G)$ ein G^α. Also ist $f(F)$ in C gleichzeitig G^α und F^α, f^{-1} ist zweiseitig von der Klasse α.

(18) Für jedes Paar α, β $(<\Omega)$ giebt es eine Abbildung f von $\mathscr{N}$ auf sich, die genau von der Klasse α, β ist (d. h. f ist nicht von einer Klasse $\xi < \alpha$, f^{-1} ist nicht von einer Klasse $\eta < \beta$). (Kuratowski F. M. 22, p. 219, théorème d'existence). | [8] Bl. 13

Zunächst sei $\alpha = 0$, $\beta > 0$. Verstehen wir das Kongruenzzeichen $\equiv$ nach dem Modul der abzählbaren Mengen, so dass $A \equiv B$ bedeutet, dass $B = (A - D) + D_1$ $(D, D_1$ abzählbar), so behaupten wir: es giebt in $X = \mathscr{N}$ Mengen H^β, die nicht $\equiv G^\eta$ $(\eta < \beta)$ sind. Hat β einen Vorgänger $\beta - 1$ und wäre jedes $H^\beta \equiv G^{\beta-1}$, so würde

$$G^\beta = H^\beta_\sigma \equiv G^{\beta-1}\,, \quad F^{\beta+1} \equiv F^\beta\,, \quad G^{\beta+2} \equiv G^{\beta+1}$$

oder

$$G^{\beta+2} = (G^{\beta+1} - D) + D' = G^{\beta+1} \cdot F^1 + G^1 = G^{\beta+1}$$

sein, während es doch G^β mit beliebig hohem Index (genau) giebt. Ist β Limeszahl, so ist (indem wir $2 \leq \eta < \beta$ annehmen) zu zeigen, dass nicht jedes H^β ein G^η ist; sei $X = \sum X_n$ Summe seiner (abgeschlossenen und offenen) Intervalle 1. Ordnung und $X_n = A_n + B_n$, A_n ein H^{β_n}, das nicht G^η mit $\eta < \beta_n$ ist, und $\beta = \mathtt{lim}\,\beta_n$, so ist $A = \sum A_n$ und $B = \sum B_n$ jedes ein G^β, A ein H^β; wenn dies ein G^η wäre, müsste $A_n = X_n A$ ein G^η sein, was für $\beta_n > \eta$ nicht stimmt. Ebenso giebt es (Komplementbildung) solche H^β, die keinem F^η $(\eta < \beta)$ kongruent sind, und wenn man in $X = X_1 + X_2$ $A_1 \subset X_1$ als $H^\beta \not\equiv G^\eta$, $A_2 \subset X_2$ als $H^\beta \not\equiv F^\eta$ wählt, so ist $A = A_1 + A_2$ ein H^β, das keinem G^η und keinem F^η kongruent ist.

Sei jetzt in X A ein H^β das $\not\equiv G^\eta, F^\eta$; dasselbe gilt für $B = X - A$. Wir zeigen dann, dass A und B | unter diesen Bedingungen auch *verdichtet* angenommen werden können. Sei (mit meinen gewöhnlichen Bezeichnungen A_γ, $A_v = AA_\gamma$, $A_u = A - A_v$) $\tilde{A} = A_v + B_u$, $\tilde{B} = B_v + A_u$. Diese Mengen sind verdichtet, da $X = A_\gamma + B_\gamma$ (X ist verdichtet), $B_u \subset X - B_\gamma \subset A_\gamma$, $\tilde{A} \subset A_\gamma$ und $A_\gamma = \tilde{A}_\gamma$ wegen $\tilde{A} \equiv A$. Ferner ist A_v in A abgeschlossen, also F^β, B_u in B offen, also $F^\beta G = F^\beta$ (wegen $\beta > 0$), $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ sind Mengen H^β und, da sie mit A, B kongruent sind, keinem F^η, G^η $(\eta < \beta)$ kongruent. Schreiben wir wieder A, B statt $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, so sind also beides Mengen F^β, aber nicht F^η. Sie lassen sich aus X_1, X_2 $(X = X_1 + X_2)$ durch Abbildungen $0, \beta$ erhalten: $A = f_1(X_1)$, $B = f_2(X_2)$ (vgl. (14), sie sind beides Mengen G^β) und die Funktion f $(= f_1, f_2$ in $X_1, X_2)$ ist eine Abbildung $0, \beta$ von $X_1 + X_2 = X$ auf $A + B = X$; sie ist nicht von einer Klasse $0, \eta$ mit $\eta < \beta$, sonst müsste $A = f(X_1)$ ein F^η sein. Genau so giebt es Abbildungen $\alpha, 0$ von X auf X, die nicht von einer Klasse $\xi, 0$ $(\xi < \alpha)$ sind. Bl. 14

Endlich sei $(\alpha > 0, \beta > 0)$ $X_1 = f_1(X_1)$ eine Abbildung der genauen Klasse $\alpha, 0$ und $X_2 = f_2(X_2)$ eine Abbildung der genauen Klasse $0, \beta$; dann ist f $(= f_1, f_2$ in $X_1, X_2)$ eine Abbildung von $X = X_1 + X_2$ auf sich, die genau von der Klasse α, β ist.

Bl. 15 | 16. 3. 37

Die Borelschen Mengen und der Nullraum. Nachträgliche Bemerkungen

(1) Jede im Nullraum X offene Menge G ist mit X homöomorph.

Für jeden Punkt $x = (n_1, n_2, \dots)\ \varepsilon\ G$ befindet sich unter den Intervallen $X_{n_1}, X_{n_1 n_2}, \dots$ ein grösstes (von kleinster Ordnung k) $X_{n_1 \cdots n_k}$, das zu G gehört; es ist durch x eindeutig bestimmt, $I(x)$; zwei solche I sind identisch oder disjunkt. Also $G = I_1 + I_2 + \cdots$ Summe von endlich oder abzählbar vielen I, wobei die I_n zugleich offen und abgeschlossen sind; G ist mit $X_1 + X_2 + \cdots$ und also mit X homöomorph (auch im Fall endlich vieler Summanden, die man übrigens wegen $X_{n_1 \cdots n_k} = \sum_n X_{n_1 \cdots n_k n}$ durch unendlich viele ersetzen kann).

(2) Jede kompakte Menge $A \subset X$ ist nirgendsdicht.

Denn die Intervalle sind nicht total beschränkt ($X_{n_1 \cdots n_k} = \sum_n X_{n_1 \cdots n_k n}$ enthält unendlich viele Punkte $x_n\ \varepsilon\ X_{n_1 \cdots n_k n}$, die paarweise Entfernungen $\frac{1}{k+1}$ haben) und A kann kein Intervall enthalten.

(3) Ist $y = f(x)$ eine schlichte Abbildung von $A \subset X$ auf $B \subset X$ derart, dass y_k eindeutig von $x_1, \dots, x_k$ und x_k eindeutig von $y_1, \dots, y_k$ abhängt, so sind A und B homöomorph.

Denn da die x_k stetige Funktionen von x sind, ist jedes y_k, also
Bl. 16 y stetige F[unktion] von x, und umgekehrt. | Z.B. $A = X$, $B = \underset{y}{E}\,(y_1 < y_2 < y_3 < \cdots)$. Man setze

$$y_k = x_1 + \cdots + x_k\,, \quad x_k = y_k - y_{k-1} \quad (x_1 = y_1)\,.$$

(B ist in X abgeschlossen, da $\underset{y}{E}\,(y_1 < y_2)$ usw. abgeschlossen sind). $A = X$, B = Menge der y, für die alle y_k verschieden sind: $B = \underset{y}{E} \prod_{k \neq l}(y_k \neq y_l)$. Man setze $y_1 = x_1$, wenn $y_1, \dots, y_{k-1}$ bestimmt sind, y_k = der x_k^{ten} unter den von $y_1, \dots, y_{k-1}$ verschiedenen Zahlen, wobei umgekehrt mit $y_1, \dots, y_k$ auch x_k bestimmt ist. B ist wieder in X abgeschlossen.

(4) Jedes verdichtete $F^{\alpha+1}$ ($\alpha > 1$) entsteht aus dem Nullraum X durch eine Abbildung der Klasse $0, \alpha$.

Der Beweis beruht auf folgendem: Ist $C = B + D$ ($\subset Y$ = vollst[ändiger] separabler Raum), B Bild von X durch eine Abbildung der Klasse $0, \alpha$ ($\alpha > 1$) und D abzählbar $\subset B_\gamma - B$ (B_γ Menge der Verdichtungspunkte von B; B ist verdichtet, also $\subset B_\gamma$), so ist auch C Bild von X durch eine Abbildung
[9] $0, \alpha$. (Vgl. mein Ms: Die Borelschen Mengen und der Nullraum, (13)).

Die Einschränkung $\alpha > 1$ habe ich bisher nicht beseitigen können *); für die
Bl. 17 verdichteten $F^2 = F_{\sigma\delta}$ kann ich also nur, da sie F^3 sind, ihre | Entstehung
[10] aus X durch Abbildungen $0, 2$ behaupten, nicht $0, 1$. (Für $\alpha = 0$ ist der

*) Inzwischen doch! S. mein Ms. 18. 3. 37

Satz sicher nicht richtig; die verdichteten $F^1 = G_\delta$ entstehen zwar durch Abbildungen $0,1$ (Kurat[owski] F. M. 22, p. 210), aber nicht durch $0,0$, da z. B. eine kompakte perfekte Menge, selbst wenn sie 0-dimensional ist, mit X nicht homöomorph ist).

Vergeblicher Versuch: angenommen, es sei eine Zerlegung $B = \sum B_n$ in disjunkte B_n möglich, die $(0,\alpha)$-Bilder von X sind und über deren Beschaffenheit relativ zu B noch Näheres vorausgesetzt werden muss; *ferner soll stets* $B_n + B_{n+1} + \cdots$ *in* B *dicht sein*. Da diese Mengen verdichtet sind und für eine verdichtete Menge $B_\alpha = B_\gamma$ ist ($B \subset B_\gamma$, $B_\alpha \subset B_{\gamma\alpha} = B_\gamma \subset B_\alpha$), so ist $(B_n + B_{n+1} + \cdots)_\gamma = B_\gamma$. Bringen wir D in eine Folge $y_1, y_2, \ldots$, worin jeder Punkt y von D unendlich oft vorkommt; V_k sei eine Umgebung von y_k mit Durchmesser $\delta_k \to 0$. Bei beliebig grossem ν ist, da $y_k \,\varepsilon\, (B_{\nu+1} + \cdots)_\gamma$, $(B_{\nu+1} + \cdots)V_k$ und also ein $B_{n_k}V_k$ mit $n_k > \nu$ unabzählbar, enthält also eine perfekte Menge Q_{n_k}; wir können | demgemäss eine Folge von Zahlen Bl. 18
$n_1 < n_2 < \cdots$ bestimmen, derart, dass es perfekte Mengen $Q_{n_k} \subset B_{n_k}V_k$ giebt. Ist dann z. B. $y = y_\alpha = y_\beta = y_\gamma = \cdots$ $(\alpha < \beta < \gamma < \cdots)$, so ist

$$Q_{n_\alpha} + Q_{n_\beta} + \cdots + y = Q_y$$

eine perfekte Menge; diese Q_y sind sämtlich disjunkt. Wir haben dann, wenn wir noch für die von $n_1, n_2, \ldots$ verschiedenen n $Q_n = 0$ setzen:

$$C = \sum_n (B_n - Q_n) + \sum Q'_n$$

mit lauter disjunkten Summanden; die $Q_n \subset B_n$ und Q'_n sind perfekt. B_n war $(0,\alpha)$-Bild $\varphi_n(X)$, $B_n - Q_n$ also $= \varphi_n(G_n)$, G_n in X offen und (man kann $Q_n \neq B_n$ annehmen) mit X homöomorph. Wir haben also jetzt

$$B_n - Q_n = f_{2n}(X_{2n}), \quad Q'_n = f_{2n-1}(X_{2n-1})$$

(X_n Intervalle von $X = \sum X_n$) und f_{2n} ist von der Klasse $0,\alpha$, f_{2n-1} von der Klasse $0,1$. Die in X schlichte stetige Funktion f ($= f_n$ in X_n) bildet X auf C ab. Ist sie von der Klasse $0,\alpha$? Wir haben, wenn G in X offen ist,

$$f_{2n}(X_{2n}G) = (B_n - Q_n)G^\alpha = B_n G^\alpha, \quad f_{2n-1}(X_{2n-1}G) = Q'_n G^1 = G^1 .$$

Für $\alpha = 1$ (nur dieser Fall wäre noch in Betracht zu ziehen) müsste, um $f(G)$ in C zu einem G^1 zu machen, B_n ein G^1 ($= F_\sigma$) in C sein, also auch in B; $B_1 + \cdots + B_n$, dessen Komplement in B dicht ist, müsste von 1. Kategorie in B, B selbst von 1. Kategorie in sich sein. Aber | dies selbst als möglich Bl. 18v
vorausgesetzt, ist B_n als F_σ in B noch keins in C, da $B = C - D$ ein G_δ in C ist. – Verfährt man ebenso mit einem in X abgeschlossenen F, so wird $f_{2n}(X_{2n}F) = (B_n - Q_n)F^\alpha$ und $f_{2n-1}(X_{2n-1}F) = Q'_n F^1 = F^1$, wodurch sich $f(F)$ bestenfalls als G^2, nicht F^1 ergiebt. Dieses Verfahren führt also nicht zum Ziel.

(5) Könnte man umgekehrt von einem verdichteten $F^2 = F_{\sigma\delta}$ zeigen, dass
[11] es aus dem Nullraum X nur durch $0, 2$, nicht durch $0, 1$ entsteht?

Z. B. von $B = \underset{x}{E}\,(x^n \to \infty)$, welches in X ein $F_{\sigma\delta}$ und kein $G_{\delta\sigma}$ ist.

Anmerkungen

[**1**] HAUSDORFF bezieht sich hier auf die französische Erstausgabe von [Ku 1933/1966]. In der späteren englischen Standardausgabe von 1966 gehören (3) und (4) zu § 36.II.

[**2**] Verweis in (6): [Ku 1933/1966], § 36.IV; Verweis in (7): [Ku 1934] (in [Ku 1933/1966] wird dies Resultat nicht explizit genannt); Verweis in (8): das nächstliegende Resultat in [Ku 1933/1966] ist Korollar 1a in § 37.II, welches besagt, daß jedes $\mathbf{F}^{\alpha+1}$ $(\alpha > 1)$ $(0, \alpha)$-Bild eines vollständigen separablen Raumes ist.

[**3**] Eine *Abbildung* α, β ist eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ $(X, Y$ metrische Räume), so daß das f-Urbild jeder in Y abgeschlossenen Menge eine $\mathbf{F}^\alpha$-Menge in X und das f-Bild jeder in X abgeschlossenen Menge eine $\mathbf{F}^\beta$-Menge in Y ist, s. Fasz. 619.

[**4**] Die Behauptung (9) wurde in [Ku 1934] bewiesen (s. die Anmerkungen [10] und [11] zu Fasz. 619). HAUSDORFF bemerkt hier einen Widerspruch in KURATOWSKIs Formulierung.

[**5**] Dies ist Satz 1 in [H 1937] (s. diesen Band, S. 539–554). Der hier geführte Beweis funktioniert nicht für $\alpha = 1$, so daß HAUSDORFF noch nicht beweisen konnte, daß jedes verdichtete $\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}_{\sigma\delta}$ $(0, 1)$-Bild von $\mathscr{N}$ ist. Dies gelang ihm erst am 18. 3. 1937 (Fasz. 624, dieser Band, S. 742–744). Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung falsch, weil durchaus nicht jedes dichte $\mathbf{F}^1 = \mathbf{G}_\delta$ homöomorph zu $\mathscr{N}$ ist.

[**6**] HAUSDORFF bezieht sich hier auf den vorigen Faszikel 619, Bl. 11. Daß die Klasse der Abbildung $(0, \alpha^*)$ anstatt $(0, \alpha)$ sein kann, war im Laufe des Beweises in Fasz. 619 klar geworden.

[**7**] Die Behauptung (15) ist Theorem 2 in [Ku 1933/1966], § 30.V. Das Resultat ist falsch für $\alpha = 1$, z. B. für Teilmengen von $\mathbb{R}$ (s. die abschließende Bemerkung in [Ku 1933/1966], § 30.V).

[**8**] Dieses Theorem bewies KURATOWSKI in [Ku 1934]. HAUSDORFF gibt einen anderen, direkteren Beweis.

[**9**] HAUSDORFF zitiert hier die Behauptung (13) von Blatt 5 des vorliegenden Faszikels 620.

[10] Das Problem, ob jedes verdichtete $\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}_{\sigma\delta}$ $(0,1)$-Bild von $\mathscr{N}$ ist, formulierte KURATOWSKI in einer Fußnote auf S. 210 von [Ku 1934]. HAUSDORFF gab in Fasz. 624 eine bejahende Antwort (s. Anmerkung [5]).

[11] S. die Anmerkungen [5] und [10].

Kommentare

Funktionen der Baireschen Klassifikation, oder, wie sie bei HAUSDORFF heißen, Borelsche Funktionen, wurden von BAIRE in seiner Dissertation [Ba 1899] eingeführt. Sie wurden in Folgearbeiten, vor allem in [Lb 1905] und [Ba 1909], ausgiebig studiert. Insbesondere entdeckte LEBESGUE die grundlegenden Beziehungen zwischen der BORELschen Mengenhierarchie und der BAIREschen Funktionenhierarchie. Dieses Thema war eines der bevorzugten Interessengebiete HAUSDORFFs in der Mengenlehre seit Veröffentlichung der *Grundzüge der Mengenlehre* (dort Kapitel IX, s. Band II dieser Edition, S. 773–787). HAUSDORFFs Arbeit [H 1919d] ist ganz diesem Gegenstand gewidmet (s. Band IV dieser Edition, S. 79–103), ebenso zahlreiche Faszikel in seinem Nachlaß, zusammenfassend dargestellt in *Mengenlehre*, §§ 41–43.

In den 30-er Jahren, vielleicht auch schon etwas eher, begann es ziemlich klar zu werden, daß zumindest im Fall der polnischen Räume jene Eigenschaften der Baireschen Funktionen, die vom Standpunkt der deskriptiven Mengenlehre aus interessant sind, viel mehr von den Borelklassen ihrer Bilder und Urbilder abhängen als von der sukzessiven Baireschen Limeskonstruktion selbst. KURATOWSKI ([Ku 1934]) führte den Begriff des Homöomorphismus der Klasse (α, β) ein (α, β Ordinalzahlen $< \omega_1$) und untersuchte die Wirkung von Abbildungen dieses Typs auf Borelmengen. HAUSDORFFs Analyse der KURATOWSKIschen Studien, ausgeführt in den Jahren 1936–1937, fand ihren Niederschlag in einer Reihe von Noten im Nachlaß und in der Publikation [H 1937].

Fasz. 618 ist vor allem einem wichtigen Resultat gewidmet, dem Erweiterungssatz (5). HAUSDORFFs Beweis unterscheidet sich ziemlich von KURATOWSKIs Beweisführung in [Ku 1933/1966].

Fasz. 619. Der Schlüsselsatz dieser Note ist III auf Blatt 10. Dieser Satz kommt dem Theorem 1 in [Ku 1934] nahe, welches folgendes besagt:

> Dafür, daß eine Menge A in einem polnischen Raum Y ein $\mathbf{F}^\alpha$ in Y ist ($\alpha > 0$), ist notwendig und hinreichend, daß ein polnischer Raum X und eine surjektive Abbildung $f : X \to A$ der Klasse $(0, \alpha - 1)$ existieren. Ist $\alpha > 1$, so kann X als 0-dimensionaler Raum gewählt werden.

(Hier wird angenommen, daß $\alpha - 1 = \alpha$ für eine Limeszahl α ist.) Man beachte, daß 0-dimensionale polnische Räume homöomorph zu abgeschlossenen Teilmengen von $\mathscr{N}$ sind. HAUSDORFF bemerkte hier bei KURATOWSKI ein Versehen für den Fall, daß α Limeszahl ist (s. Anm. [4] zu Fasz. 620), und gab in Satz III eine korrekte Formulierung an.

Obwohl in II und III $\alpha > 1$ gefordert wird, schließt die Beweisführung bei leichter Modifikation den Fall $\alpha = 1$ mit ein. Es genügt in Wirklichkeit, II_1 zu zeigen, d. h. II für $\alpha = 1$. HAUSDORFFs Argumentation führt nicht direkt zum Ziel, weil eine Menge B der Klasse $\mathbf{G}^1 = \mathbf{F}_\sigma$ nicht notwendig disjunkte abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist. Aber B ist offenbar disjunkte Vereinigung von Differenzen abgeschlossener Mengen, d. h. von $\mathbf{G}_\delta$-Mengen, welche topologisch ebenfalls polnische Räume sind, also $(0,1)$-Bilder von abgeschlossenen Teilmengen von $\mathscr{N}$, und so weiter.

Behauptung I für $\alpha = 1$ ist im Kern bereits in *Mengenlehre* enthalten (s. Anm. [93] zu *Mengenlehre*), denn ein $\mathbf{F}^1$ ist per definitionem ein $\mathbf{G}_\delta$, folglich selbst ein polnischer Raum und somit $\mathbf{F}^0$ und $\mathbf{F}_\sigma$. HAUSDORFF merkt an, daß das Resultat durch eine Modifikation des in [Ku 1934] geführten Beweises dafür, daß jeder insichdichte polnische Raum $(0,1)$-Bild von $\mathscr{N}$ ist, erhalten werden kann.

Man beachte den Unterschied zwischen Satz III einerseits und den Sätzen IV und V andererseits: die beiden letzteren behaupten die Existenz von Abbildungen, deren Wertebereich (als auch deren Definitionsbereich) der ganze der gegebenen Menge B zugrundeliegende polnische Raum Y ist. Dies erlaubt es, gewisse Eigenschaften niedriger Borelklassen routinemäßig auf höhere Klassen auszudehnen. HAUSDORFF gibt ein Beispiel dieser Art am Ende von Fasz. 619. Wir geben hier ein anderes Beispiel, welches sich auf den Fall $\beta = 1$ bezieht. Angenommen, B ist eine $\mathbf{H}^{\alpha+1}$-Teilmenge eines polnischen Raumes Y. Dann existieren nach Satz IV ein polnischer Raum X, eine $\mathbf{H}^1$-Menge $A \subseteq X$ (d. h. ein $\mathbf{\Delta}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta$), und eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ der Klasse $(0,\alpha)$, so daß $f(A) = B$. Damit liefert jede Darstellung von A als Differenzenkette von abgeschlossenen Mengen (wie in *Mengenlehre*, § 30) eine Darstellung von A als Differenzenkette von $\mathbf{F}^\alpha$-Mengen.

Fasz. 620 enthält einen Beweis (für den Fall $\alpha > 1$) von HAUSDORFFs Hauptresultat auf diesem Gebiet: Jede verdichtete $\mathbf{F}^{\alpha+1}$-Menge B ist $(0,\alpha)$-Bild des ganzen Baireschen Raumes $\mathscr{N} = \mathbb{N}^{<\omega}$ (und nicht nur einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathscr{N}$ wie im Fall einer beliebigen, nicht notwendig verdichteten, $\mathbf{F}^{\alpha+1}$-Menge). Der Ursprung von HAUSDORFFs Interesse an diesem Problem ist wahrscheinlich eine von KURATOWSKI in [Ku 1934], S. 210 aufgeworfene Frage: Ist jedes $\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}_{\sigma\delta}$ $(0,1)$-Bild von $\mathscr{N}$? HAUSDORFFs Beweis für den Fall $\alpha > 1$ im Fasz. 620 ist etwas verschieden von der endgültigen Version, die in [H 1937] publiziert wurde. Er hatte sich tagelang darum bemüht, auch den Fall $\alpha = 1$ zu klären (der von seinem Beweis im Fasz. 620 vom 10. 3. 1937 nicht erfaßt wird). Die Lösung fand er am 18. 3. 1937; die erste Niederschrift ist der Faszikel 624. Das Manuskript der Veröffentlichung [H 1937] wurde dann am 24. 3. 1937 an *Fundamenta Mathematicae* geschickt (Fasz. 97).

Im übrigen wird auf den Kommentar zu [H 1937] in diesem Band verwiesen, der etwas zur Bedeutung von HAUSDORFFs Satz für die deskriptive Mengenlehre sagt. Obwohl [H 1937] den Faszikel 620 im wesentlichen übertrifft, haben wir diesen trotzdem hier in voller Länge aufgenommen, weil er einen Eindruck von HAUSDORFFs Arbeitsweise auf dem Wege zu einem wichtigen Ergebnis vermittelt. Besonders erwähnt sei auch das spezielle Resultat (17) für verdichtete $\mathbf{G}^\alpha$, welches in [H 1937] nicht vorkommt.

Literatur

[Ba 1899] Baire, R.: *Sur les fonctions de variables reelles*, Annali di matematica pura ed applicata, Serie IIIa, **3** (1899), S. 1–122.

[Ba 1909] Baire, R.: *Sur la représentation des fonctions discontinues*, Acta Math., **32** (1909), S. 97–176.

[Ku 1933] Kuratowski, C.: *Sur les théorèmes topologiques de la théorie des fonctions de variables reelles*, C. R. Acad. Sci. Paris, **197** (1933), S. 19–20.

[Ku 1934] Kuratowski, C.: *Sur une généralization de la notion de homéomorphie*, Fund. Math., **22** (1934), S. 206–220.

[Ku 1933/1966] Kuratowski, C.: *Topology*, vol. I, New edition, revised and augmented. Academic Press, 1966. Erstausgabe: *Topologie I*, Monografie Matematyczne, vol. III, Warszawa 1933.

[Lv 1924a] Lavrentieff, M.: *Sur la recherche des ensembles homéomorphes*, C. r. Acad. sci. Paris, **178** (1924), S. 187 – 190.

[Lv 1924b] Lavrentieff, M.: *Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes*, Fund. Math., **6** (1924), S. 149–160.

[Lb 1905] Lebesgue, H.: *Sur les fonctions représentable analytiquement*, Journ. de Math. (Ser. 6), **1** (1905), S. 139–216.

[Lu 1930] Lusin, N.: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris, 1930. 2nd corr. ed. Chelsea Publ. Co., NY, 1972.

[Ma 1916] Mazurkiewicz, S.: *Über Borelsche Mengen*, Bull. Acad. Sci. Cracowie, **2** (1916), S. 490–494.