Mengenlehre – Historische Einführung

V. Kanovei (Abschn. 5), W. Purkert (Abschn. 1, 2, 3, 4, 6)[1]

Inhalt:

1. Einleitung

1927 erschien im Verlag Walter de Gruyter Felix Hausdorffs Buch *Mengenlehre*. Es war als „zweite, neubearbeitete Auflage" der *Grundzüge der Mengenlehre* deklariert, in Wahrheit aber ein vollkommen neues Buch. Wegen der vom Verlag verlangten Beschränkung der Seitenzahl der neuen Ausgabe auf etwa 60 % des Umfangs der *Grundzüge*[2] waren drastische Kürzungen nötig geworden. So ließ Hausdorff aus dem in den *Grundzügen* behandelten Stoff die Maß- und Integrationstheorie, große Teile der Theorie der geordneten Mengen sowie die Ausführungen über euklidische Räume weg. Die wohl einschneidendste Änderung gegenüber den *Grundzügen* bestand darin, daß Hausdorff die dort von ihm selbst entwickelte Theorie der topologischen Räume in der Neuausgabe fast vollständig verließ und die Punktmengentheorie auf metrische Räume beschränkte.

Andererseits war Hausdorff natürlich bestrebt, wichtige seit dem Erscheinen der *Grundzüge* erzielte Fortschritte auf dem Gebiet der Mengenlehre in sein neues Buch aufzunehmen. Solche Fortschritte gab es vor allem in zwei Bereichen:

[1] Ein herzlicher Dank geht an Herrn Egbert Brieskorn für zahlreiche wertvolle Hinweise.
[2] Näheres dazu im Abschnitt 2 dieser Einführung.

1.) Die Untersuchungen zur Grundlegung der Mengenlehre hatten zu einer weithin akzeptierten vervollständigten Version der ZERMELOschen Axiomatik geführt (A. FRAENKEL, TH. SKOLEM).
2.) Es hatte einen beträchtlichen Ausbau des Gebietes gegeben, das man heute als deskriptive Mengenlehre bezeichnet (ALEXANDROFF, HAUSDORFF, LUSIN, SUSLIN, SIERPIŃSKI, KURATOWSKI u. a.).
Die Problematik der axiomatischen Grundlegung der Mengenlehre lag HAUSDORFF nicht besonders am Herzen – er überließ diese Arbeit gerne anderen und konnte sich durch das Erscheinen von FRAENKELS Büchern [Fr 1923] und [Fr 1927] im Hinblick auf das eigene Werk entlastet fühlen.[3]

Ganz anders lagen die Dinge bei der deskriptiven Mengenlehre. HAUSDORFF bemühte sich, alle auf diesem Gebiet erzielten Fortschritte, insbesondere die der russischen Schule um LUSIN, in sein Buch einzuarbeiten. Die große Resonanz auf HAUSDORFFS *Mengenlehre* beruhte zu einem wesentlichen Teil darauf, daß hier erstmals eine monographische Darstellung des damals aktuellen Standes der deskriptiven Mengenlehre gegeben wurde. Diese Tatsache mag es rechtfertigen, daß im folgenden der genaueren Analyse der Entstehung und Wirkung des HAUSDORFFschen Buches ein kurzer Abriß der Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre bis zum Jahre 1916 vorangestellt wird. In diesem Jahr publizierte HAUSDORFF seinen bedeutendsten Beitrag zur deskriptiven Mengenlehre, die Lösung des Kontinuumproblems für Borelmengen[4] ([H 1916]); gleichzeitig und unabhängig von HAUSDORFF erzielte ALEXANDROFF das gleiche Ergebnis ([Al 1916]). Im Jahr danach begann mit der Entdeckung der analytischen Mengen[5] durch LUSINS Schüler M. SUSLIN eine neue Etappe in der Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre, welche vor allem durch die russische Schule um LUSIN und die polnische Schule um SIERPIŃSKI geprägt wurde. Diese Etappe ist im Abschnitt 5. dieser Einführung, in den Kommentaren zu HAUSDORFFS *Mengenlehre* und in den Kommentaren zu seinen zahlreichen nachgelassenen Papieren zur deskriptiven Mengenlehre eingehend behandelt, so daß wir in dem

[3]In einer Postkarte HAUSDORFFS an FRAENKEL vom 9. 6. 1924 heißt es dazu: „Für die freundliche Dedication der 2. Auflage Ihrer „Einleitung i. d. Mengenlehre“ sage ich Ihnen herzlichen Dank, zugleich mit bestem Glückwunsch zu dem buchhändlerischen Erfolg Ihres Werkes. Sie haben mir für die 2. Aufl. meines Buches (die ich gänzlich neu bearbeiten will) einen grossen Dienst geleistet, insofern ich für verschiedene wichtige Dinge, die mir nicht liegen, auf Ihre ausgezeichnete Darstellung verweisen kann, z. B. für die Axiomatik (in der Sie einen wesentlichen Fortschritt über Zermelo hinaus erzielt haben betr. das Axiom der Aussonderung) und für die Behandlung der Antinomien.“ NL FRAENKEL, Abraham Halevi Fraenkel Archive (Arc. 4* 1621), Jewish National and University Library, Jerusalem.

[4]Das System der Borelmengen eines metrischen Raumes ist das kleinste Mengensystem, welches die offenen Mengen enthält und welches gegenüber Komplementbildung und der Bildung abzählbarer Vereinigungen abgeschlossen ist. Es kann durch transfinite Rekursion der Länge ω_1 (erste überabzählbare Ordinalzahl), beginnend mit den offenen Mengen G und den abgeschlossenen Mengen F, aufgebaut werden (*Mengenlehre*, S. 82 ff. und S. 177–178, dieser Band, S. 126 ff. und S. 221–222). Die so sukzessive entstehenden Teilklassen der Klasse aller Borelmengen bilden die Borelsche Hierarchie.

[5]Die analytischen Mengen (A-Mengen, Suslinmengen) sind die stetigen Bilder von Borelmengen. Sie können durch die SUSLINsche A-Operation (auch SUSLINscher Prozeß genannt) erzeugt werden (*Mengenlehre*, S. 91, dieser Band, S. 135).

folgenden historischen Überblick darauf nicht einzugehen brauchen.

In einer modernen Darstellung der klassischen deskriptiven Mengenlehre ([Ke 1995]) wird das Gebiet folgendermaßen umschrieben:

> Descriptive set theory is the study of „**definable sets**" in **Polish** (i. e., separable completely metrizable) **spaces**. In this theory, sets are classified in hierarchies, according to the complexity of their definitions, and the structure of the sets in each level of these hierarchies is systematically analyzed.[6]

Zu diesem „klassischen" Teil kamen ab den 30-er Jahren logische und metamathematische Untersuchungen hinzu sowie die Erforschung der engen Beziehungen zur Theorie der rekursiven Funktionen (Entstehung der „effektiven deskriptiven Mengenlehre").[7] Die deskriptive Mengenlehre hat mittlerweile Anwendungen in zahlreichen Zweigen der Mathematik gefunden, z. B. in der Maßtheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Topologie, Funktionalanalysis, harmonischen Analyse, Limitierungstheorie, Potentialtheorie, Ergodentheorie, Darstellungstheorie Liescher Gruppen, Kombinatorik und mathematischen Logik.[8]

Die deskriptive Mengenlehre hat wie die allgemeine Mengenlehre ihren Ausgangspunkt in CANTORs Untersuchungen über die Eindeutigkeit der trigonometrischen Entwicklung ([Ca 1872]). CANTOR hatte 1870 bewiesen, daß aus

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0 \tag{1}$$

für alle $x \in (-\pi, \pi]$ folgt, daß $a_k = 0$, $b_k = 0\ \forall\, k$ ist. 1871 zeigte er, daß dieser Satz bestehen bleibt, wenn die Reihe in endlich vielen Punkten nicht konvergiert oder die Null nicht darstellt. Entscheidend für die weitere Entwicklung war CANTORs Frage nach der Existenz unendlicher Eindeutigkeitsmengen; dabei heißt P eine Eindeutigkeitsmenge, wenn aus der Gültigkeit von (1) für alle $x \in (-\pi, \pi] \setminus P$ folgt, daß $a_k = 0$, $b_k = 0\ \forall\, k$ ist. 1872 konnte CANTOR zeigen, daß es unendliche Eindeutigkeitsmengen gibt. Um sie zu charakterisieren, führte er den Begriff der Ableitung eine Punktmenge ein: Für $P \subseteq \mathbb{R}$ ist die Ableitung P' die Menge aller Häufungspunkte von P. Der Prozeß des Ableitens kann iteriert werden: $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$. Die mengentheoretische Operation des abzählbaren Durchschnitts und weiteres sukzessives Ableiten führten CANTOR auf die Idee des „Zählens über das Unendliche hinaus", auf die transfiniten Ordinalzahlen:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)} =: P^{(\omega)}, \qquad \left(P^{(\omega)}\right)' =: P^{(\omega+1)}, \quad \text{usw.}$$

Für den Aufbau einer allgemeinen Mengenlehre mußte es nur noch gelingen, diese neuen „Zahlen" $\omega, \omega+1, \ldots$ unabhängig vom Begriff der Ableitungsordnung von Punktmengen zu definieren; dies erreichte CANTOR 1883 mittels des

[6] [Ke 1995], S. XV.
[7] S. dazu das Buch von Y. N. MOSCHOVAKIS [Mos 1980].
[8] Literaturhinweise zu zahlreichen Anwendungen findet man bei KECHRIS [Ke 1995], S. 347.

Begriffs der Wohlordnung. Die transfiniten Ordinalzahlen sind für die deskriptive Mengenlehre, insbesondere für die Untersuchung höherer Punktklassen, ein unverzichtbares Instrumentarium.

Die 1872 von CANTOR gefundenen unendlichen Eindeutigkeitsmengen sind gewissermaßen „magere" Mengen: P ist Eindeutigkeitsmenge, falls $P^{(n)} = \emptyset$ ist für eine natürliche Zahl n ([Ca 1872]). Die Eindeutigkeitsmengen sind bis heute ein intensiv bearbeitetes Forschungsgebiet geblieben; die moderne deskriptive Mengenlehre hat dazu wesentliche Beiträge leisten können.[9]

Mittels der Ableitung einer Punktmenge konnte CANTOR topologisch „einfache" Mengen definieren: P heißt abgeschlossen, falls $P' \subseteq P$, P heißt insichdicht, falls $P \subseteq P'$; eine abgeschlossene insichdichte Menge heißt perfekt. Die Komplemente abgeschlossener Mengen sind die offenen Mengen; diese kommen bei CANTOR allerdings nur implizit vor. Die abgeschlossenen bzw. die offenen Mengen sind das Ausgangsmaterial für die im obigen Zitat erwähnten Hierarchien. Für die abgeschlossenen Mengen konnte CANTOR einen Struktursatz beweisen, der die Frage der Mächtigkeit klärt: Ist P abgeschlossen, so gilt

$$P = R \cup S, \qquad R \cap S = \emptyset \tag{2}$$

mit höchstens abzählbarem R und perfektem S (Satz von CANTOR-BENDIXSON). Da eine nichtleere perfekte Menge die Mächtigkeit des Kontinuums hat, folgt aus dem Satz von CANTOR-BENDIXSON die Gültigkeit der CANTORschen Kontinuumhypothese für abgeschlossene Mengen von $\mathbb{R}$: Jede abgeschlossene unendliche Menge ist entweder abzählbar oder sie hat die Mächtigkeit des Kontinuums. CANTOR hoffte, daß man durch Ausdehnung von (2) auf beliebige Teilmengen $P \subseteq \mathbb{R}$ die Kontinuumhypothese wird allgemein beweisen können. Dies kann nicht gelingen, wie wir heute wissen. Die erfolgreichen Bemühungen von YOUNG, HAUSDORFF, ALEXANDROFF und SUSLIN, den Satz von CANTOR-BENDIXSON auf wesentlich allgemeinere Mengenklassen als die abgeschlossenen Mengen auszudehnen, haben jedoch der Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre wichtige Impulse verliehen.

Die erste Monographie, die vollständig der deskriptiven Mengenlehre gewidmet war, LUSINs *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* ([Lu 1930a]), enthält nach einem *Préface* von LEBESGUE ein *Avertissement* des Autors, welches folgendermaßen beginnt:

> Les questions traitées dans cet Ouvrage appartiennent à la théorie *descriptive* des fonctions dont MM. Borel, Baire et Lebesgue sont les fondateurs.[10]

Die deskriptive Funktionentheorie, von der LUSIN hier spricht, war nicht zuletzt aus philosophischen Erwägungen heraus entstanden, aus Erwägungen, die das Problem der Existenz mathematischer Gegenstände betrafen. Die im Hinblick darauf zentrale Frage hatte LEBESGUE in einem Brief an BOREL folgendermaßen formuliert:

---

[9] S. dazu das Buch [KeLou 1989] und [KeLou 1992].

[10] [Lu 1930a], S. XIII.

Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir?[11]

Die Antwort, die er unmittelbar anschloß, formulierte eine Ansicht, die auch von Baire und Borel vom Beginn ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit an vertreten worden war:

> C'est évidemment une affaire de convention; mais je crois qu'on ne peut bâtir solidement qu'*en admettant qu'on ne démontre l'existence d'un être qu'en le définissant.*[12]

Was unter „definierbar" zu verstehen ist, hat Lebesgue im selben Jahr so beschrieben:

> Un objet est défini ou donné quand on a prononcé un nombre fini de mots s'appliquant à cet objet et à celui-là seulement; c'est-à-dire quand on a *nommé* une propriété caractéristique de l'objet.[13]

Dies ist in der Tat etwas vage und würde zur Präzisierung einer formalen Sprache bedürfen. Versuche einer solchen Präzisierung haben Baire, Borel und Lebesgue nicht unternommen; für sie mußten sich die mathematischen Objekte durch gewisse akzeptierte Prozeduren „beschreiben" (décrire) lassen. Jedenfalls gehörten Cantors Theorie beliebiger Mengen beliebig großer Mächtigkeit, beliebige Funktionen im Sinne Dirichlets und beliebige Auswahlen in Zermelos Beweis des Wohlordnungssatzes nicht zum Bereich des „Beschreibbaren".[14]

Die Herausbildung der französischen Schule der „deskriptiven Funktionentheorie" kann auch als Beginn der „deskriptiven Mengenlehre" als eines eigenständigen Teilgebietes der Mathematik betrachtet werden.[15] Am Anfang dieser Entwicklung stand Borels Monographie *Leçons sur la théorie des fonctions* ([Bo 1898]), das erste Buch, welches in größerem Umfang Ideen der Mengenlehre in Frankreich verbreitete.[16] Cantors Schöpfungen werden dort im Haupttext aber nur so weit in Betracht gezogen, als es für die Theorie der reellen Funktionen erforderlich erscheint. So heißt es nach Einführung des Mächtigkeitsbegriffes mit Blick auf die Begriffe „abzählbar" und „von Kontinuumsmächtigkeit":

> Ces notions nous suffiront pour les applications que nous avons en vue.[17]

Für Maßtheorie und deskriptive Mengenlehre besonders bedeutsam war die Einführung der „ensembles mesurables", jener Mengenklasse, die Hausdorff

---

[11] [BBHL 1905], S. 265.

[12] Ebd.

[13] [Le 1905], S. 205.

[14] Sehr eingehend werden die Ansichten der „französischen Halbintuitionisten" Baire, Borel und Lebesgue bei Moore behandelt ([Mo 1982], S. 92 ff.). Moore arbeitet auch im einzelnen heraus, daß sie in ihren eigenen Arbeiten ihre strikte Ablehnung des Auswahlaxioms nicht durchhalten konnten: eine Reihe von Sätzen in diesen Arbeiten benötigen das Auswahlaxiom, zumindest seine abzählbare Version.

[15] S. dazu auch Band II dieser Edition, S. 774–777.

[16] Näheres dazu im Band II dieser Edition; S. 22–23.

[17] [Bo 1898], S. 20. Nur in ergänzenden Noten am Schluß des Buches werden beliebige Mächtigkeiten und die transfiniten Ordinalzahlen erwähnt.

später in den *Grundzügen* Borelsche Mengen nannte. Ein Intervall $I = (a, b)$ ist meßbar und soll das Maß $\mu(I) = b - a$ haben. Sind E, E' meßbar und ist $E' \subseteq E$, so soll auch $E \setminus E'$ meßbar sein mit $\mu(E \setminus E') = \mu(E) - \mu(E')$. Sind $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ meßbar und paarweise disjunkt, so ist auch $E = \cup E_i$ meßbar und es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\,.$$

Die meßbaren Mengen sind dann etwas vage so definiert:

> *Les ensembles dont on peut définir la mesure en vertu des définitions précédentes seront dits par nous ensembles mesurables,* $[\cdots]$[18]

Sie entstehen also aus den Intervallen durch die sukzessive angewandten Operationen der Komplementbildung und der abzählbaren disjunkten Vereinigung. Die Schritte in diesem Prozeß führen, ausgehend von den offenen Intervallen, zu den Mengenklassen der Borelschen Hierarchie; bei BOREL selbst kann man von dieser Hierarchie bestenfalls etwas ahnen.

Am Beginn von BAIREs Dissertation [B 1899] stand der Zweifel, ob ein so allgemeiner Funktionsbegriff wie der von DIRICHLET akzeptiert werden kann; im Hinblick auf die DIRICHLETsche Definition heißt es bei BAIRE:

> On ne s'occupe pas, dans cette définition, de rechercher par quels moyens la correspondance peut être effectivement établie; on ne cherche même pas s'il est possible de l'établir.[19]

Er selbst stellte sich das Ziel, Funktionenklassen abzugrenzen, die durch allgemein akzeptierte analytische Methoden erzeugt werden können. Das wichtigste Ergebnis in dieser Hinsicht war die Einführung der nach ihm benannten Funktionen: Die Baireschen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilden die kleinste Funktionenklasse, die alle stetigen Funktionen enthält und abgeschlossen unter der Bildung punktweiser Limites ist. BAIRE definiert sie induktiv: K_0 sei die Klasse der stetigen Funktionen. Für eine Ordinalzahl $\xi < \omega_1$ ist $f \in K_\xi$, falls

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ ist mit } f_k \in K_{\xi_k}, \quad \xi_k < \xi$$

und f für kein $\mu < \xi$ bereits in K_μ liegt. Die Funktionenklassen K_ξ bilden die sogenannte Bairesche Hierarchie. BAIRE untersuchte insbesondere die Klassen K_1 und K_2; z. B. gab er notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß $f \in K_1$ ist.[20] Mit der Unterscheidung von Mengen erster und zweiter Kategorie schuf er ein wichtiges Instrument für die Untersuchung von Punktmengen.

Eine Synthese und inhaltliche Weiterentwicklung der Ideen von BAIRE und BOREL erreichte LEBESGUE in seinem umfangreichen Aufsatz *Sur les fonctions représentables analytiquement* ([Le 1905]). Verschiedene Autoren haben diese Arbeit sogar als den Beginn der deskriptiven Mengenlehre betrachtet. So heißt es in der *Topologie* von ALEXANDROFF/HOPF:

[18] [Bo 1898], S. 48.
[19] [B 1899], S. 1.
[20] Satz VIII, S. 255 in HAUSDORFFS *Mengenlehre*.

> Die deskriptive Mengenlehre wurde (anschließend an BAIREs Arbeiten über unstetige Funktionen) von LEBESGUE 1905 begründet.[21]

LEBESGUE betrachtete Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Klasse der *fonctions représentables analytiquement* ist die kleinste Klasse, die alle Konstanten und die Projektionen $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ enthält und die abgeschlossen ist unter Summen-, Produkt- und punktweiser Limesbildung. Mittels der Lebesgueschen Mengen $\{x; a \leq f(x) \leq b\}$ bzw. $\{x; a < f(x) < b\}$ kann jeder Klasse von Funktionen eine Mengenklasse zugeordnet werden. Umgekehrt kann man auch von einer Mengenklasse ausgehen, z. B. von den Borelmengen: Eine Funktion $f(x)$ heißt Borel-meßbar (fonctions mesurables (B)), wenn ihre Lebesgueschen Mengen sämtlich Borelsche Mengen sind. LEBESGUE konnte zeigen, daß die Klasse der Baireschen Funktionen mit der Klasse der Borel-meßbaren Funktionen zusammenfällt und diese wiederum fällt mit der Klasse der analytisch repräsentierbaren Funktionen zusammen. Ferner entsprechen sich Schritt für Schritt die Borelsche und die Bairesche Hierarchie.

LEBESGUE bewies die Existenz von Funktionen jeder Baireschen Klasse K_ξ, ferner auch die Existenz von Funktionen, die keiner Baireschen Klasse angehören. Den Beweis für letztere Behauptung könnte man sehr einfach in Analogie zu CANTORs Beweis der Existenz transzendenter Zahlen führen: Die Menge der Baireschen Funktionen hat die Mächtigkeit $\aleph$, die aller reellen Funktionen die Mächtigkeit $\aleph^\aleph > \aleph$, also gibt es reelle Funktionen, die keine Baireschen Funktionen sind. Ein solcher Beweis wäre allerdings mit LEBESGUEs philosophischen Ansichten nicht vereinbar gewesen. Er konstruierte auf $[0,1] \times [0,1]$ eine Universalfunktion $\varphi(x,t)$ für die Klasse aller Baireschen Funktionen in einer Variablen, d. h. zu jeder Baireschen Funktion $g(x)$ auf $[0,1]$ existiert eine reelle Zahl $t_g \in [0,1]$ mit $\varphi(x,t_g) = g(x)$. $\varphi(x,t)$ ist keine Bairesche Funktion (zweier Variablen), denn sie kann offenbar keiner Klasse K_ξ mit $\xi < \omega_1$ angehören. $\varphi(x,t)$ ist aber „definierbar" im LEBESGUEschen Sinne.

LEBESGUE zeigte auch, daß die nach heutiger Terminologie Lebesgue-meßbaren Funktionen und Mengen umfangreichere Klassen liefern als die Baireschen Funktionen und die Borelschen Mengen, d. h. 1.) Es existieren L-meßbare Funktionen, die nicht analytisch repräsentierbar sind; 2.) Es existieren L-meßbare Mengen, die keine Borelmengen sind. Diese Funktionen und Mengen sind aber „definierbar".

Dies war in etwa der Stand der Theorie, den HAUSDORFF vorfand, als er an die Erarbeitung der *Grundzüge der Mengenlehre* ging. Von den philosophisch motivierten Einschränkungen, die sich die französischen Forscher auferlegt hatten, grenzte sich HAUSDORFF in den *Grundzügen* deutlich ab. Nach der Erwähnung der Antinomien und der ZERMELOschen Bemühungen, sich dagegen durch eine geeignete axiomatische Grundlegung der Mengenlehre abzusichern, schreibt er, offenbar im Hinblick auf die französische Debatte (insbesondere in [BBHL 1905]):

---

[21] [AH 1935], S. 21. In einer Fußnote wird an dieser Stelle auf [Le 1905] verwiesen. Y. N MOSCHOVAKIS bemerkt zu LEBESGUES Arbeit: „This beautiful and seminal paper truly started the subject of descriptive set theory." ([Mos 1980], S. XIII).

> Hierher gehört auch die vielumstrittene Frage, unter welchen Bedingungen ein mathematisches Objekt, etwa eine Zahl, eine Menge, eine Funktion als „definiert" anzusehen sei (die Frage nach der Definition einer „Definition"). Wir folgen der freien Auffassung CANTORS (Punktmengen III[22]) und verlangen nicht, daß die logische Disjunktion, ob ein Ding einer Menge angehört oder nicht, mit unseren aktuellen Mitteln wirklich entschieden werden könne. Eine reelle Zahl ist entweder algebraisch oder transzendent, und damit ist die Menge der transzendenten Zahlen „wohldefiniert", obgleich man zur Zeit der ebengenannten CANTORschen Abhandlung noch nicht wußte, daß π zu ihr gehört $[\cdots]$. Die Funktion $f(x)$, die für rationales x gleich 1 und für irrationales gleich 0 ist, ist wohldefiniert, obgleich wir die Werte $f(2^e)$, $f(2^\pi)$, $f(\pi^\pi)$ usw. nicht kennen. Dieser Mengenbegriff und dieser (DIRICHLETsche) Funktionenbegriff bindet sich weder an „Kriterien, die nur eine endliche Anzahl von Versuchen erfordern", noch an „analytische Darstellungen" u. dgl. Bekanntlich ist die gegenteilige, allerengste Einschränkung der mathematischen Definition von L. KRONECKER gefordert, aber von niemandem je ernstlich durchgeführt worden.[23]

Für HAUSDORFF waren die Ergebnisse der französischen Schule der Theorie der reellen Funktionen wegen ihrer mathematischen Substanz interessant: Funktionen und Mengen, die durch gewisse abzählbare Prozeduren entstehen, haben interessante Struktureigenschaften, die es zu ergründen gilt. Am Anfang mag auch die Hoffnung eine Rolle gespielt haben, auf CANTORS Weg das Kontinuumproblem zu lösen; HAUSDORFF bemerkte aber bald, daß hier vermutlich kein Fortschritt zu erzielen war.[24]

In ihrem Essay *Deskriptive Mengenlehre in Hausdorffs Grundzügen der Mengenlehre* (Band II dieser Edition, S. 773–787) weisen V. KANOVEI und P. KOEPKE auf einen methodisch außerordentlich bedeutsamen Wechsel der Perspektive hin, den HAUSDORFF in den *Grundzügen* gegenüber der französischen Schule vorgenommen hat:

> In den *Grundzügen* baut HAUSDORFF die deskriptive Theorie zum ersten Mal als eine Theorie von *Mengen* und nicht als eine Theorie von *Funktionen* auf. Diese Sichtweise hat sich historisch durchgesetzt.[25]

In dem genannten Essay werden HAUSDORFFS eigene Ergebnisse, die er in den *Grundzügen* auf dem Gebiet der deskriptiven Mengenlehre erzielt hat, eingehend gewürdigt; es genügt deshalb, sie hier nur stichpunktartig zu nennen:

– Einführung des Begriffs des vollständigen metrischen Raumes und Ausarbeitung der Theorie der separablen vollständigen metrischen Räume (d. h. der

[22] HAUSDORFF bezieht sich hier auf [Ca 1882].

[23] [H 1914a], S. 450; Bd. II dieser Edition, S. 550. LEBESGUE hatte seine Überlegungen zu ZERMELOS Beweis des Wohlordnungssatzes folgendermaßen resümiert: „En résumé, quand j'examine de près le raisonnement de M. Zermelo, comme d'ailleurs plusieurs raisonnements généraux sur les ensembles, je le trouve trop peu kroneckérien pour lui attribuer un sens $[\cdots]$". ([BBHL 1905], S. 267).

[24] Vgl. dazu die kleingedruckte Passage in [H 1914a], S. 321; Band II dieser Edition, S. 421.

[25] Band II dieser Edition, S. 773.

polnischen Räume) als natürliche Basis der deskriptiven Mengenlehre,
– Einführung der Borelschen Hierarchie mittels transfiniter Rekursion und Einführung suggestiver Notationen für die Anfangsstufen der Borelschen Hierarchie, die sich allgemein durchgesetzt haben (G_δ, F_σ, $G_{\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta}$, usw.)[26],
– Lösung des Kontinuumproblems für $G_{\delta\sigma\delta}$-Mengen: jede unendliche $G_{\delta\sigma\delta}$-Menge in einem separablen vollständigen metrischen Raum ist entweder abzählbar oder hat die Mächtigkeit des Kontinuums,
– Einführung der reduziblen Mengen; Beweis, daß dies genau die Mengen sind, die zugleich G_δ und F_σ sind,
– Charakterisierung der Mengen, die zugleich G_δ und F_σ sind, durch Differenzenketten: Genau die Mengen der Gestalt

$$A = \bigcup_{2\alpha<\xi} (X_{2\alpha} \setminus X_{2\alpha+1}), \qquad \{X_\gamma\}_{\gamma<\xi}$$

eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen der Länge $\xi < \omega_1$, sind gleichzeitig G_δ und F_σ.

An den Beweis des Satzes über die Mächtigkeit der unendlichen $G_{\delta\sigma\delta}$-Mengen knüpft Hausdorff zunächst die Bemerkung, daß damit das Kontinuumproblem für die Mengen $G, G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, G_{\delta\sigma\delta\sigma}, F, F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}$ gelöst ist. Dann heißt es:

> Der Versuch scheint nicht aussichtslos, das gleiche für alle Borelschen Mengen zu beweisen, $[\cdots]$[27]

Dies gelang Hausdorff 1916, wie eingangs erwähnt wurde.[28] Ausführungen zur historischen Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre nach 1916, insbesondere in Rußland und Polen, finden sich im Abschnitt 5 dieser Einführung und in den Anmerkungen der Herausgeber zu Hausdorffs *Mengenlehre* (insbesondere in Nr. [84], [87], [92], [94]–[99], [105], [109], [111] und [130]). Ferner finden sich zahlreiche einschlägige historische Anmerkungen in den Kommentaren zu Hausdorffs nachgelassenen Studien zur deskriptiven Mengenlehre in diesem Band, S. 569 ff.

Der Terminus „deskriptive Mengenlehre“ kommt bereits in einem Brief von Alexandroff an Hausdorff vom 4. 7. 1926 vor (s. das ausführliche Zitat aus diesem Brief im Abschnitt 3 dieser Einführung). Im Druck erscheint dieser Ausdruck im deutschen Sprachraum anscheinend erstmals 1935 bei Alexandroff/Hopf. Im § 3 der Einleitung zu ihrem Buch *Topologie* geben die beiden Autoren einen Überblick über diejenigen Themenkreise, die sie zur Topologie rechnen. Unter Nr. 12 bemerken sie dort:

---

[26] Zur Definition s. *Mengenlehre*, § 18 und S. 136 (dieser Band, S. 126 ff. und S. 180).

[27] [H 1914a], S. 466.

[28] Die entsprechende Arbeit [H 1916] ist in diesem Band, S. 429–442, abgedruckt. Im zugehörigen Kommentar wird auch auf Alexandroffs Beweis für den gleichen Satz eingegangen, der wiederum für Suslins Entdeckung der A-Operation entscheidende Anregungen gegeben hat (s. [Lo 2001]).

> Zur Topologie gehört auch die „*deskriptive Punktmengenlehre*" (Théorie descriptive des ensembles), d. h. im wesentlichen die Theorie der Borelschen Mengen, der A-Mengen und der projektiven Mengen. [$\cdots$]
>
> Eine Einführung in die deskriptive Mengenlehre findet man in HAUSDORFFS Mengenlehre (§§ 18, 19, 32, 33, 37, 43), eine ausführlichere Darstellung in dem Buch „Topologie I" von KURATOWSKI; eine stark philosophisch gefärbte Darstellung dieser Theorie gibt LUSIN in den „Leçons sur les ensembles analytiques" (Collection Borel).[29]

Der Hinweis auf den französischen Ausdruck „Théorie descriptive des ensembles" könnte vermuten lassen, daß dieser Terminus in Frankreich vor 1935 geläufig war. Dies ist nicht der Fall; er kommt weder in LUSINs Buch noch in der französisch geschriebenen *Topologie* von KURATOWSKI ([Ku 1933]) noch in sonstigen Publikationen vor. Es ist nur von „Théorie descriptive des fonctions" die Rede. Das Wort „descriptif" in bezug auf mathematische Inhalte erscheint erstmals in dem Buch *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* von C. DE LA VALLÉE POUSSIN ([VP 1916]); dort heißt es in der Einleitung:

> Toutes ces questions [welche in den Teilen 1 und 2 des Buches behandelt werden – W. P.] sont surtout d'ordre *métrique*. Dans la troisième Partie, j'aborde des questions d'ordre plus exclusivement *descriptif*, étroitement liées cependant aux précédentes. Il s'agit de la répartition des fonctions dans les *classes successives de Baire*, du théorème de M. Baire sur les fonctions de classe 1 et des extensions de ce théorème que l'on doit à M. Lebesgue.[30]

2. Die Entstehung des Buches *Mengenlehre*

HAUSDORFFS *Grundzüge der Mengenlehre* hatten nach dem ersten Weltkrieg eine lebhafte Rezeption erfahren.[31] Mitte 1923 war das Werk ausverkauft. Der Verlag Veit & Co. in Leipzig, der es herausgebracht hatte, war bereits 1919 vom Verlag Walter de Gruyter in Berlin übernommen worden. De Gruyter hatte 1921 eine Lehrbuchserie „Göschens Lehrbücherei" aus der Taufe gehoben; als erster Band in der Gruppe 1 „Reine und angewandte Mathematik" erschien 1921 das Buch *Irrationalzahlen* von OSKAR PERRON. In der Ankündigung von Göschens Lehrbücherei wurde das Ziel des Unternehmens folgendermaßen umrissen:

> Mit diesem Unternehmen bezwecken wir eine Sammlung von ausgesprochenen *Lehrbüchern* aus den Gebieten der *Mathematik*, der *exakten Naturwissenschaften* und der *Technik*, die wissenschaftliche Gründlichkeit, leichte Verständlichkeit und klaren Aufbau in sich vereinen und ganz

[29] [AH 1935], S. 19–20. Die Klasse der projektiven Mengen ist die kleinste Klasse, die alle analytischen Mengen enthält und die abgeschlossen gegenüber Komplementbildung und Bildung stetiger Bilder ist.
[30] [VP 1916], S. IX. Den Hinweis darauf verdanke ich Herrn Jean-Michel Kantor (Paris).
[31] S. dazu Band II dieser Edition, S. 55 ff.

> besonders für *Studierende* der *Universitäten* und *technischen Hochschulen*, für *Lehramtskandidaten* und *Lehrer mittlerer* und *höherer Schulen*, zur Benutzung an *pädagogischen Akademien* und *Lehrerseminaren*, sowie auch für das *Selbststudium* gleichartig vorgebildeter Leser geeignet sind. Jeder Band wird einen Umfang von 10 bis 20 Druckbogen haben (im allgemeinen etwa 15 bis 16 Bogen) und ungefähr den Inhalt einer einsemestrigen Vorlesung umfassen.

Einem Bogen entsprechen sechzehn Seiten; die ins Auge gefaßten Lehrbücher sollten also in der Regel etwa 260 Seiten und maximal 320 Seiten umfassen. Als Mitte 1923 der Verlag wegen einer Neuauflage der *Grundzüge der Mengenlehre* für „Göschens Lehrbücherei" an HAUSDORFF herantrat, mußten – wie bereits erwähnt – erhebliche Kürzungen stattfinden (die *Grundzüge* hatten 476 Seiten). Am 17. 6. 1923 schreibt HAUSDORFF in einem Brief an ERNST ZERMELO:

> Es wird Sie vielleicht interessiren, dass mein Buch über Mengenlehre ausverkauft ist und der Verleger eine zweite, allerdings verkürzte Auflage (in Göschens Lehrbücherei) vorschlägt. Das stimmt auch mit meinen eigenen Wünschen überein; ich hoffe die Sache beim zweiten Mal erheblich einfacher und eleganter zu machen (auch in den Bezeichnungen). Das Meiste über geordnete Mengen werde ich 'rausschmeissen und dafür mehr über Punktmengen bringen. Etwaige Rathschläge, die Sie mir ertheilen können oder wollen, werden mit größtem Dank entgegengenommen (welches eigentlich der Zweck dieser Mittheilung ist)![32]

Die in diesem Brief angedeutete stärkere Berücksichtigung der Theorie der Punktmengen korrespondierte mit einer Verschiebung in HAUSDORFFs Forschungsinteressen: Seit Erscheinen der *Grundzüge der Mengenlehre* hatte er sich zunehmend von der allgemeinen Mengenlehre abgewandt und mehr der Analysis, insbesondere der Maßtheorie, der Theorie der reellen Funktionen und der Funktionalanalysis zugewandt. Die damit verbundene stärkere Orientierung auf die Erforschung spezieller Klassen von Punktmengen deutete sich bereits in HAUSDORFFs Lehrtätigkeit zu Beginn seiner zweiten Bonner Zeit an. Er begann sein Bonner Ordinariat im Wintersemester 1921/22 mit einer vierstündigen Vorlesung *Mengenlehre und Theorie der reellen Funktionen*.[33] Eine einsemestrige Vorlesung hatte dem Verleger als Inhalt eines Bandes von Göschens Lehrbücherei in etwa vorgeschwebt, und in der Tat diente die genannte Vorlesung HAUSDORFF als Grundlage für seine „völlige Neubearbeitung".[34] Man kann sagen, daß die Vorlesung inhaltlich so gut wie vollständig in die *Mengenlehre* eingegangen ist. Eine Reihe von Paragraphen des Buches (z. B. 4–11, 13, 15, 20, 22, 23) wurde weitgehend, z. T. wörtlich, aus der Vorlesung übernommen, wobei im Buch natürlich ausführlichere Erläuterungen und mehr Beispiele zu finden sind. Auch zwei einschneidende Veränderungen der *Mengenlehre* gegenüber

[32] Nachlaß ERNST ZERMELO, Universität Freiburg.

[33] NL HAUSDORFF : Kapsel 13 : Fasz. 42. HAUSDORFF war zum 1. 4. 1921 nach Bonn berufen worden, hatte aber im Sommersemester 1921 mit Zustimmung des Kultusministeriums noch in Greifswald gelesen und seine Stelle in Bonn erst am 1. 10. 1921 angetreten.

[34] [H 1927a], S. 5.

den *Grundzügen* finden sich schon in der Vorlesung, nämlich der Wegfall der von HAUSDORFF in den Jahren 1904–1909 selbst geschaffenen höheren Theorie der geordneten Mengen und der Übergang von der Theorie der topologischen Räume mit zweitem Trennungsaxiom zur spezielleren Theorie der metrischen Räume.

Die meisten Abschnitte, die HAUSDORFF in seinem Buch gegenüber der Vorlesung wesentlich erweiterte bzw. die er ganz neu aufnahm, behandeln Themen der deskriptiven Mengenlehre. So sind in der Vorlesung die Ausführungen über Ringe, Körper, σ- und δ-Systeme sowie den Suslinschen Prozeß im Kapitel I „Mengen und ihre Verknüpfungen“ mit enthalten; sie nehmen dort nur $9\frac{1}{2}$ handschriftliche Seiten ein. Im Buch widmet er diesen Themen ein eigenes Kapitel „Mengensysteme“, in dem u. a. die BORELsche Hierarchie besonders eingehend behandelt wird unter ausgiebiger Benutzung der δs-Operation.[35] In diesem Kapitel tritt auch erstmals die Bezeichnung “Suslinsche Menge“ auf.[36]

Wesentlich erweitert gegenüber der Vorlesung sind die Abschnitte, welche die Borel- und Suslinmengen metrischer Räume behandeln. In der Vorlesung ist einiges davon in die Paragraphen über separable und über vollständige Räume mit eingebaut, im Buch gibt es ein eigenes Kapitel „Punktmengen und Ordnungszahlen“ . Ganz neu gegenüber der Vorlesung sind hier z. B. die Existenzsätze, d. h. der Nachweis, daß in einem vollständigen Raum mit nichtleerem perfekten Kern zu jeder Ordnungszahl $\xi < \omega_1$ Borelmengen existieren, die genau von ξ-ter Klasse sind, sowie Suslinmengen, die keine Borelmengen sind. Neu sind auch die von SUSLIN und LUSIN stammenden tiefliegenden Resultate in Form zweier Bedingungen, deren jede notwendig und hinreichend dafür ist, daß eine Suslinmenge in einem polnischen Raum eine Borelmenge ist.

HAUSDORFF hebt im Vorwort zur *Mengenlehre* auch hervor, daß er gegenüber den *Grundzügen* die Baireschen Funktionen stärker berücksichtigt habe. Bereits in der genannten Vorlesung sind die Baireschen Funktionen eingehender behandelt als in den *Grundzügen*; im Buch wird das noch weiter ausgebaut und systematischer dargestellt, insbesondere die BAIREsche Klassifikation, ihr Zusammenhang mit der BORELschen Hierarchie und Sätze über Bairesche Bilder von separablen Suslin- bzw. Borelmengen.

Eine Änderung gegenüber den *Grundzügen*, die HAUSDORFF im Vorwort explizit nennt, ist der Wegfall der Maß- und Integrationstheorie. Vermutlich hatte er dies jedoch zunächst nicht so vorgesehen. Im Nachlaß findet sich ein druckreif ausgearbeitetes Manuskript zur Maß- und Integrationstheorie, welches in der Kapitel- und Paragraphenzählung unmittelbar an das Buch *Mengenlehre* anschließt: „Zehntes Kapitel: Mengenfunktionen und Funktionale. § 45. Additive Mengenfunktionen.“ [37] Das Manuskript ist nicht datiert; wir wissen jedoch aus

---

[35] Die δs-Operation haben HAUSDORFF, SIERPIŃSKI und KOLMOGOROFF entdeckt; vgl. dazu die Fußnote 1 in [H 1933a], dieser Band, S. 473, ferner Abschnitt 5 dieser Einführung.

[36] SUSLIN und LUSIN hatten diese Mengen in Anlehnung an LEBESGUE [Le 1905] analytische Mengen bzw. A-Mengen genannt. Zur Entdeckungsgeschichte der Suslinmengen und zu ihrer verschiedenen Benennung s. [Lo 2001].

[37] NL HAUSDORFF : Kapsel 51 : Fasz. 1129, Bll. 1–73. Der Faszikel enthält Bl. 74 ff. eine vor-

NL HAUSDORFF : Kapsel 33 : Fasz. 244 vom 13. 11. 1925, daß die Paragrapheneinteilung und -numerierung der *Mengenlehre* im Herbst 1925 bereits feststand, denn dieser Faszikel ist überschrieben „Zu § 41" und behandelt Einschiebungssätze für reelle Funktionen. Im Januar 1925 stand die Paragraphennumerierung offenbar noch nicht fest, denn Faszikel 232 vom 2. 1. 1925 trägt die Überschrift „Ergänzung zu Kapitel IX, §   : Funktionen und Urbildmengen." Faszikel 1129 dürfte also im Verlaufe des Jahres 1925 entstanden sein. Daß dies Manuskript als letztes Kapitel des Buches geplant war, zeigen auch Verweise im Text. So wird auf Bl. 31 der Borelsche Überdeckungssatz benutzt; es heißt dort „nach dem Borelschen Satz § 26, II". Der Satz II in § 26 der *Mengenlehre* ist in der Tat der Borelsche Überdeckungssatz.

Im ersten Paragraphen „Additive Mengenfunktionen"[38] betont HAUSDORFF, daß Begriffe wie Länge, Fläche, Volumen, Gewicht, Ladung u. dgl. auf solche Funktionen führen. Dann heißt es:

> Es sei noch auf das Gebiet der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* hingewiesen, das völlig von der Idee der additiven Mengenfunktion beherrscht wird.[39]

In seiner Vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Sommersemester 1923[40] hatte HAUSDORFF in den Paragraphen 4–6[41] einen Abriß der Maß- und Integrationstheorie gegeben, freilich auf die Bedürfnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugeschnitten. Das hier in Rede stehende Manuskript ist allgemeiner gehalten und gibt einen knappen Überblick über die Maß- und Integrationstheorie auf dem damals aktuellsten Stand.[42] Allerdings gab es Mitte der 20-er Jahre bereits mehrere gute Darstellungen dieses Gebietes[43]; dies hat HAUSDORFF im Vorwort dann auch als Grund dafür genannt, warum die Maß- und Integrationstheorie schließlich weggefallen ist. Verwendet hat HAUSDORFF den Abriß der Maß- und Integrationstheorie aus Fasz. 1129 als Grundlage für die Paragraphen 2 „Additive Mengenfunktionen (Masse)" und 3 „Lineare Funktionale (Integrale)" seiner Vorlesung *Reelle Funktionen und Maßtheorie* vom Wintersemester 1932/33.[44] Dort wird darüber hinaus der Zusammenhang von Integration und Differentiation ausführlich behandelt, insbesondere die DENJOYschen Derivierten einschließlich des DENJOYschen Verteilungssatzes, ferner weitere Integralbegriffe wie z. B. das Perron-Integral.

---

läufige Version, in der schon eine Einteilung in Paragraphen gegeben ist, die Numerierung der Paragraphen aber noch offen gelassen wurde.

[38] Unter „additiv" versteht HAUSDORFF „σ-additiv", additive Mengenfunktionen im heutigen Sinne heißen bei ihm „beschränkt additiv".

[39] Fasz. 1129, Bl. 3.

[40] NL HAUSDORFF : Kapsel 21 : Fasz. 64, vollständig abgedruckt im Band V dieser Edition, S. 595–722.

[41] Bd. V, S. 626–666.

[42] Die Überschriften der auf den einleitenden § 45 folgenden Paragraphen lauten: § 46. Konstruktion additiver Mengenfunktionen, § 47. Lineare Funktionale, § 48. Konstruktion linearer Funktionale.

[43] S. dazu auch den Kommentar von S. D. CHATTERJI zu Fasz. 64 in Band V dieser Edition, S. 723 ff., insbesondere S. 727–728; ferner [Ch 2002].

[44] NL HAUSDORFF : Kapsel 17 : Fasz. 53.

Der Verlagsvertrag für die *Mengenlehre* war bereits am 12. Mai 1924 unterschrieben worden. Darin wurde folgendes vereinbart:

> Die Zusendung des vollkommen druckfertigen Manuskriptes sowie der reproduktionsfähigen Vorlagen zu den Figuren soll bis Ende 1924 an die Verlagshandlung erfolgen. [· · ·]
>
> Die erste Auflage wird in 1500 (Fünfzehnhundert) bis 2000 (Zweitausend) Exemplaren abgezogen.[45]

Der Abgabetermin wurde im Dezember 1924 auf den 15. April 1925 verlängert.[46] Aber auch diesen Termin hat Hausdorff offenbar nicht halten können. Über die weitere Vorbereitung der Drucklegung der *Mengenlehre* erfährt man einiges aus den Briefen Alexandroffs an Hausdorff.[47] Erstmalig erwähnt wird das Buch in einem Brief vom 27. 10. 1925:

> Hoffentlich hatten Sie schöne Tage in der Schweiz, die Ihrer Gesundheit wohl getan haben. Dadurch wird auch sicher Ihre Arbeit an Ihrem Buche, auf das wir, russische Mengentheoretiker, mit einer so großen Ungeduld warten, wesentlich gefördert.

Im November 1925 hatte Alexandroff Hausdorff in Bonn besucht. Spätestens zu diesem Zeitpunkt wußte Alexandroff, daß es sich nicht um eine Neuauflage im üblichen Sinne, sondern um ein vollkommen neues Buch handeln würde. Am 4. 4. 1926 schreibt er an Hausdorff:

> Es freut mich sehr zu vernehmen, daß die zweite Auflage Ihres Buches endlich dem Drucke übergeben ist: es warten ja so sehr viele Menschen auf dieses Buch, insbesondere auch in meiner Heimat; der Verleger soll also nicht allzuviel Zeit weiter verlieren, er dürfte ja auch auf einen guten geschäftlichen Erfolg rechnen (auch in Amerika und in Polen, hoffentlich endlich auch in Deutschland werden ja rasch viele Exemplare verkauft).

---

[45] Staatsbibliothek zu Berlin, Dep. 42 (Archiv de Gruyter), 227. Es muß im Archiv des Verlages de Gruyter umfangreiches Material, die *Mengenlehre* betreffend, gegeben haben. In dem Katalog *Repertorium der Briefe aus dem Archiv Walter de Gruyter* ([Ne 1999]), der anläßlich der Übergabe des Archivs an die Staatsbibliothek zu Berlin herausgegeben wurde, heißt es:

> Hausdorff, Felix, Professor für Mathematik an der Universität Bonn (1868–1942). 34 Briefe, 3 Briefkarten, 6 Postkarten, 1 Aktennotiz über eine Besprechung 23. 6. 1923–21. 8. 1935. 34 Schreiben an H. 1 Vertragsentwurf. Beilagen: Auszug aus einem Brief von Prof. R. Haussner 26. 5. 1922. Brief des Verlags B. Westermann & Co., New York 16. 6. 1927. Schriftwechsel mit der Zweigstelle Leipzig (Herr Eydt) wegen der Vorräte der „Mengenlehre“ 20. 9. –1. 10. 1934. Brief der Druckerei F. Ullmann in Zwickau 22. 11. 1934. Auszug aus einem Brief von Professor W. Süß, Freiburg i. Br., dem Vorsitzenden der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 11. 4. 1939. Brief an Professor L. Bieberbach 7. 8. 1939. Inhalt: Ausarbeitung und Veröffentlichung der „Mengenlehre“ in „Göschens Lehrbücherei“ nebst 2 Neudrucken.

Dieses Material konnte leider trotz intensiver mehrwöchiger Nachforschungen in der Staatsbibliothek und im Verlag de Gruyter nicht mehr aufgefunden werden.

[46] Handschriftliche Notiz auf dem Rand des Verlagsvertrages.

[47] NL Hausdorff : Kapsel 61.

> Ich werde mich besonders interessieren um (unseren Novembergesprächen entsprechend) eine Korrektur Ihres Buches mitlesen zu dürfen.

Aus weiteren Briefen geht hervor, daß Alexandroff die Korrekturen bis etwa Kapitel VII gelesen hat. Die restlichen Bögen haben ihn wegen intensiver Reisetätigkeit im Herbst 1926 zu spät erreicht. Im Nachlaß Hausdorffs befindet sich ein Exemplar der Bogenkorrekturen[48], aus dem ersichtlich ist, daß diese im Dezember 1926 abgeschlossen waren. Die *Mengenlehre* muß im Januar oder Februar 1927 erschienen sein, denn Alexandroff bedankte sich in einem Brief vom 6. 3. 1927 für die Zusendung des Buches. Aus diesem Brief geht hervor, daß auch Lusin ein Exemplar erhielt. Interessant ist in diesem Zusammenhang eine Bemerkung Hausdorffs in seinem Brief an Alexandroff vom 31. 5. 1927. Dort heißt es:

> Herr Lusin hat mir für das Buch bisher nicht gedankt. Ob es ihn wohl ärgert, dass ich die (A)-Mengen Suslinsche Mengen genannt habe? In der Arbeit Ens[embles] analytiques (Fund. Math.), die ich grösstenteils sehr schwach finde, hat er ja die Vaterschaft auf Lebesgue übertragen. Wirklich schön sind aber seine neuen Beweise für die beiden Hauptsätze, die ich – nach Mitteilung von Sierpiński – noch in mein Buch aufgenommen habe.
>
> Hoffentlich verschluckt Russland und Polen ungeheure Mengen meines Buches, damit ich meinem Verleger imponiere![49]

3. Der Übergang von den topologischen Räumen zur spezielleren Theorie der metrischen Räume

Hausdorffs Entscheidung, in der *Mengenlehre* nicht die von ihm selbst in den *Grundzügen* begründete Theorie der topologischen Räume darzustellen und sich im wesentlichen auf die Theorie der metrischen Räume zu beschränken, führte schon vor dem Erscheinen der *Mengenlehre* zu einer Reaktion Alexandroffs. Unter Bezug auf seine Mitarbeit an den Korrekturen der *Mengenlehre* schrieb Alexandroff am 4. 7. 1926 an Hausdorff:

> Daß Sie nur sehr wenige meiner Bemerkungen berücksichtigen werden ist mir weder unangenehm, noch unerwartet: ich habe mir erlaubt, alles, was mir beim Lesen Ihres Buches einfiel auch aufzuschreiben [· · ·]
>
> Was nun speziell meine Bemerkungen über den metrischen bzw topologischen Standpunkt betrifft, so vergessen Sie ja nicht, lieber Herr Hausdorff, daß ich in dieser Frage durchaus nicht objektiv sein kann, vor allem deshalb nicht, daß ich mit der ersten Auflage Ihres Buches mit tausenden innigsten Fäden verbunden bin, ja sogar, daß mir dieses Buch vielleicht das liebste in der ganzen Literatur ist, daß ich, infolgedessen oft eine, sogar gut motivierte, aber nicht unentbehrliche Abänderung, im buchstäblichen Sinne schmerzhaft empfinde. Durch diesen subjektiven Grund

[48] NL Hausdorff : Kapsel 28 : Fasz. 100.
[49] NL Hausdorff : Kapsel 62. S. dazu auch [Lo 2001].

> würde ich mich, natürlich, nicht leiten lassen, wenn ich nicht überhaupt der Meinung wäre (für deren Entstehen Sie allerdings eine gewiße Verantwortung tragen!), daß unter den, bis jetzt bekannten, Eigenschaften der Punktmengen die topologischen doch die interessantesten sind: außer der Topologie im engeren Sinne des Wortes, deren Gebiet allein jetzt über alle Grenzen wächst (ohne leider dabei zusammenhängend zu sein!) fällt ja auch die ganze sogenannte deskriptive Mengenlehre (Baire. Lebesgue usw) unter den Begriff der topologischen Eigenschaften, und wenn man alles das ausschließt, bleibt ja tatsächlich weniger als 50 % der Punktmengenlehre übrig [$\cdots$]

Möglicherweise war die Formulierung, mit der HAUSDORFF die hier in Rede stehende Abänderung im Vorwort der *Mengenlehre* ankündigt, durch ALEXANDROFFs Bemerkungen beeinflußt. Er schreibt dort, nachdem er den Wegfall der Theorie der geordneten Mengen und der Maß- und Integrationstheorie angekündigt hat:

> Mehr als diese Streichungen wird vielleicht bedauert werden, daß ich zu weiterer Raumersparnis in der Punktmengenlehre den *topologischen* Standpunkt, durch den sich die erste Auflage anscheinend viele Freunde erworben hat, aufgegeben und mich auf die einfachere Theorie der *metrischen* Räume beschränkt habe, wofür ein flüchtiger Überblick (§ 40) über die topologischen Räume kein genügender Ersatz ist.[50]

In dem erwähnten § 40 bespricht HAUSDORFF zunächst verschiedene Möglichkeiten, in einer Menge axiomatisch eine Topologie einzuführen. Als undefinierter Grundbegriff wird jeweils einer der folgenden Begriffe gewählt: offene Menge, abgeschlossene Menge, abgeschlossene Hülle, offener Kern, Umgebung.[51] HAUSDORFF skizziert dann Möglichkeiten, die Räume durch Trennungseigenschaften verschiedener Stärke sowie durch Separabilitätseigenschaften weiter zu spezialisieren. Dieser kurze Paragraph war insofern von historischer Bedeutung, als hier erstmalig eine systematische Zusammenstellung der in verschiedenen Originalarbeiten verstreuten Vorschläge zur Einführung von Topologien und zur Formulierung von Trennungs- und Separabilitätseigenschaften im Rahmen eines Lehrbuchs erfolgte.[52] Für Lehrbücher der allgemeinen Topologie wurde es später kanonisch, mit einer Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten der Einführung von Topologien zu beginnen.

Es wird vielleicht nicht nur die „Raumersparnis“ gewesen sein, die HAUSDORFF bewogen hat, sich auf die metrischen Räume zu konzentrieren. Er wird in einem Lehrbuch in Göschens Lehrbücherei das Ziel gehabt haben, seinen Lesern besonders den Teil der allgemeinen Topologie nahezubringen, der in den zwanziger Jahren am intensivsten erforscht war und der in verschiedenen Zweigen der Mathematik schon die meisten Anwendungen gefunden hatte, und

[50] [H 1927a], S. 5–6. Der Ausdruck „Raumersparnis“ verrät auch hier HAUSDORFFs Sinn für Ironie, der sein literarisches Werk durchweg ausgezeichnet hatte.

[51] S. dazu den Artikel *Zum Begriff des topologischen Raumes*, Bd. II dieser Edition, S. 718–732.

[52] Vgl. [En 1977], S. 41.

das war ohne Zweifel die Theorie der metrischen Räume. Deren Bedeutung betont z. B. R. Engelking in seinem Buch *General Topology* (in den historischen Anmerkungen zum Kapitel „Metric and Metrizable Spaces“); es heißt dort:

> The class of metric spaces is sufficiently large to include many objects studied in various branches of mathematics and thus describe them in geometric language, and, at the same time, the spaces in this class seem to be sufficiently simple to permit the use of geometric intuition.[53]

So arbeitete die Funktionalanalysis, die sich besonders nach 1920 stürmisch entwickelte, mit normierten, d. h. mit speziellen metrischen Räumen. Die ebenfalls aufblühende deskriptive Mengenlehre studierte Punktmengen vor allem in separablen vollständigen metrischen Räumen. Was die allgemeine Topologie betrifft, so konstatiert Engelking:

> For many years topologists' attention was focused on metric spaces and, in particular, on separable metric spaces. No doubt, the latter class is the best explored class of topological spaces; Kuratowski's two-volume monograph [1966] and [1968] is a veritable encyclopaedia on this subject.[54]

Auch Hausdorffs eigene Arbeiten aus dem Zeitraum zwischen den *Grundzügen* und der *Mengenlehre* untersuchen – soweit sie nicht rein analytischen Charakters sind – Objekte in metrischen Räumen.[55] So wird in der bereits erwähnten Arbeit *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen* ([H 1916]) das Kontinuumproblem für Borelmengen in einem separablen vollständigen metrischen Raum gelöst. In Hausdorffs wohl einflußreichstem Zeitschriftenaufsatz *Dimension und äußeres Maß* ([H 1919a]) beschränkt er sich zwar auf Euklidische Räume, die Übertragung auf metrische Räume liegt aber auf der Hand.[56] Die Arbeit *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerungen* ([H 1919d]) behandelt von vornherein reelle Funktionen, die auf einem metrischen Raum definiert sind; die Ergebnisse sind weitgehend in die Paragraphen 41 und 42 der *Mengenlehre* eingeflossen.[57] Schließlich enthält [H 1924] Hausdorffs berühmten G_δ-Satz: Jedes G_δ in einem vollständigen metrischen Raum ist mit einem vollständigen metrischen Raum homöomorph.[58]

Eine ähnliche Gewichtung bei der Wahl der studierten Raumklassen hatte auch P. Urysohn vorgenommen. Obwohl er stets ein lebhaftes Interesse an allgemeinen topologischen Räumen hatte, betreffen viele seiner herausragenden Leistungen metrische Räume. Als Alexandroff nach Urysohns frühem Tod dessen Arbeit *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes* ([Ur 1925/1926])

---

[53] [En 1977], S. 320.

[54] Ebenda, S. 320. [1966] und [1968] bedeuten [Ku 1966] und [Ku 1968] in unserem Literaturverzeichnis.

[55] Die bedeutenden Beiträge, die Hausdorff bereits in den *Grundzügen der Mengenlehre* zur Theorie der metrischen Räume leistete, sind im Band II dieser Edition, S. 762–787 besprochen worden.

[56] S. Band IV dieser Edition, S. 21–54.

[57] S. Band IV dieser Edition, S. 79–103.

[58] S. dazu diesen Band, S. 443–453.

aus dem Nachlaß zur Publikation vorbereitete, schrieb er an HAUSDORFF im Hinblick auf diese „Hauptarbeit" URYSOHNs:

> In der Topologie der allgemeinen (in metrischen kompacten Räumen) gelegenen Continua wird das eine der größten und bahnbrechenden Leistungen sein; in dieser Topologie der Continua lag immer der Schwerpunct seiner Interessen, die abstracte Topologie war für ihn gewißermaßen ein Nebenfach, obwohl er die letzte Zeit sich hauptsächlich mit den abstracten Räumen beschäftigte.[59]

Diese Gewichtung erklärt vielleicht auch URYSOHNs lebhaftes Interesse an Metrisationssätzen, d. h. am Auffinden möglichst allgemeiner hinreichender Bedingungen dafür, daß ein topologischer Raum mit einem geeignet gewählten metrischen Raum homöomorph ist. Auch HAUSDORFF hatte Metrisationssätze bewiesen. Seine Ergebnisse[60] wurden aber durch die URYSOHNs übertroffen. Am 23. 8. 1924, unter dem unmittelbaren Eindruck von URYSOHNs tragischem Tod, schrieb HAUSDORFF an ALEXANDROFF:

> Mit Schauder vor der Sinnlosigkeit des Schicksals halte ich den Brief in Händen, den mir Urysohn am 16. August geschrieben hat – wahrscheinlich den letzten Brief seines Daseins, einen Tag vor dem Tode. Ich wollte ihm darauf antworten, dass sein Beweis des Satzes von der Metrisirbarkeit normaler Räume mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom so schön und einfach sei und dass er damit die lange und complicirte Arbeit über die Metrisation kompakter Räume so weit überholt habe, dass ich meine Beweise nun nicht mehr der Veröffentlichung für werth halte.[61]

Die fundamentale Rolle, welche der Begriff des topologischen Raumes in der modernen Mathematik spielen sollte, war Mitte der zwanziger Jahre noch nicht abzusehen. Das betraf insbesondere auch die geometrische Topologie, jene auf GAUSS, LISTING, RIEMANN, MÖBIUS, BETTI, POINCARÉ und BROUWER zurückgehende Forschungsrichtung von großer Tiefe und Schönheit, welche die allgemeine Theorie der topologischen Räume erst relativ spät als ihre unverzichtbare Grundlage betrachtete.[62]

Andererseits war, durch HAUSDORFFs *Grundzüge* initiiert, die allgemeine Topologie in den zwanziger Jahren als eine eigenständige mathematische Disziplin beträchtlich weiterentwickelt worden, vor allem durch die russische Schule, die polnische Schule und durch Forscher wie FRÉCHET, TIETZE und VIETORIS. Es gab deshalb auch manche Stimmen des Bedauerns über HAUSDORFFs Einschränkung der Raumtheorie auf die metrischen Räume. ALEXANDROFF wurde schon genannt; seine gemeinsam mit H. HOPF verfaßte *Topologie* ([AH 1935])

[59]NL HAUSDORFF : Kapsel 61, Brief vom 2. 9. 1924.

[60]Aus dem Nachlaß publiziert in diesem Band, S. 755–758.

[61]NL HAUSDORFF : Kapsel 62.

[62]S. dazu von E. BRIESKORN und E. SCHOLZ den Abschnitt „Zur Aufnahme mengentheoretisch-topologischer Methoden in die Analysis Situs und geometrische Topologie" in der historischen Einführung zu HAUSDORFFs *Grundzüge der Mengenlehre*, Band II dieser Edition, S. 70–75.

war die erste Monographie, die eine Synthese der allgemeinen Topologie mit anderen Zweigen der Topologie anstrebte.[63] Weitere Stimmen des Bedauerns finden sich in Rezensionen der *Mengenlehre*. So heißt es bei G. Feigl im Jahresbericht der DMV:

> Weniger leichten Herzens wird man sich damit abfinden, daß der Theorie der Punktmengen von vornherein metrische Räume zugrunde gelegt und daß die für die Topologie so außerordentlich wichtige Theorie allgemeinerer Räume, deren systematische Darstellung in den „Grundzügen" eine beherrschende Stellung eingenommen hatte, ebenfalls (bis auf einen kurzen referierenden Paragraphen) beiseite gelassen worden ist. Aber auch diese Streichung wird man billigen müssen: Die abstrakte Topologie hat im letzten Jahrzehnt, namentlich durch die Arbeiten von Alexandroff und Urysohn, so gewaltige Fortschritte gemacht, daß eine einigermaßen erschöpfende Darstellung nur noch in einem besonderen Werk gegeben werden kann.[64]

Ein mit „D." signierender Referent im *Nieuw Archief voor Wiskunde* bemerkt:

> Jammer is het vooral, dat de schrijver in de leer der puntverzamelingen het topologische standpunt heeft verlaten en zich, behoudens een vluchtig overzicht, beperkt heeft tot de eenvoudige theorie der metrische ruimten.[65]

Ähnlich äußert sich H. M. Gehman im *Bulletin of the AMS*.[66] Hans Hahn spricht in den *Monatsheften für Mathematik und Physik* von einem „Opfer, das aus raumökonomischen Gründen gebracht werden mußte und das dem Verfasser wohl gleich schmerzlich war, wie dem sachkundigen Leser."[67] Schließlich schreibt A. Rosenthal in der *Deutschen Literaturzeitschrift*:

> Unter dem jetzt Weggelassenen befindet sich manches, was man nur ungern vermissen wird. Gerade einige solche Theorien, die man H. selbst zu verdanken hat, sind in der 2. Aufl. ausgeschieden worden; nämlich die höheren Teile der Theorie der geordneten Mengen und – was ganz besonders bedauerlich ist – die von H. in der 1. Aufl. geschaffene Theorie der topologischen Räume, an die inzwischen so viele andere Mathematiker angeknüpft haben.[68]

4. Zur Rezeption der *Mengenlehre*

In der eben herangezogenen Rezension von Rosenthal wird die trotz Raumknappheit ausführliche Darstellung der deskriptiven Mengenlehre besonders hervorgehoben:

---

[63] Leider blieb das Werk – durch die Zeitumstände bedingt – unvollendet. Von den geplanten drei Bänden erschien nur der erste.
[64] [Fei 1928], S. 56.
[65] [D. 1928], S. 411.
[66] [Geh 1927], S. 779.
[67] [Hahn 1928], S. 57.
[68] [Ro 1928], S. 294.

> Darüber hinaus ist als besonders wertvoller Zuwachs eine allgemeine und umfassende Theorie der Borelschen Mengen (die in der 1. Aufl. nur kurz gestreift wurde) und der noch allgemeineren (1917 von Suslin entdeckten und hier von H. nach ihm benannten) Suslinschen Mengen zu betrachten. Diese Theorie ist nunmehr im Buch sehr stark betont und zieht sich durch alle Teile des Buches hindurch, was naturgemäß bei den Anwendungen auf Funktionen in einer eingehenden Theorie der Baireschen Funktionen seinen Ausdruck findet.[69]

ROSENTHAL schließt, sicherlich nicht zuletzt wegen dieses „wertvollen Zuwachses", mit einer Prognose:

> Die 2. Aufl. wird sicherlich ebenso viel und eifrig studiert werden wie die 1. Aufl.; und es ist zu erwarten, daß sie in eben so hohem Maße wie die erste anregend wirken wird.[70]

Es ist ganz ausgeschlossen, in diesem Rahmen eine Rezeptionsgeschichte der *Mengenlehre* zu schreiben. Im folgenden soll nur anhand einiger statistischer Angaben und einiger ausgewählter Beispiele verdeutlicht werden, daß sich diese Voraussage ROSENTHALS voll und ganz bestätigt hat.

Die lebhafte Rezeption der *Grundzüge der Mengenlehre* hatte erst Jahre nach Erscheinen des Buches eingesetzt, was hauptsächlich auf den ersten Weltkrieg zurückzuführen war. Ganz im Gegensatz dazu wurde die *Mengenlehre* sofort mit großer Aufmerksamkeit aufgenommen. Zum einen waren die äußeren Bedingungen für wissenschaftliche Arbeit 1927 viel besser als in den Kriegs- und ersten Nachkriegsjahren, zum anderen war HAUSDORFF mittlerweile ein weltweit bekannter und anerkannter Mathematiker, nicht zuletzt durch seine *Grundzüge*. Einige Rezensionen der *Mengenlehre* wurden schon erwähnt; insgesamt erschienen in den Jahren 1927 und 1928 mindestens elf, davon fünf in Deutschland, zwei in den USA, je eine in Holland, Norwegen, Spanien und der Tschechoslowakei.[71] Besonders bemerkenswert ist die schon genannte Besprechung von HANS HAHN, des Vorgängers von HAUSDORFF im Bonner Ordinariat und bedeutenden Forschers auf den Gebieten Funktionalanalysis und Topologie; sie schließt mit den Worten:

> Soll ein zusammenfassendes Urteil über dieses Buch abgegeben werden, so kann es nur lauten: Eine in jeder Hinsicht mustergültige Darstellung eines schwierigen und dornigen Gebietes; ein Werk von der Art derer, die den Ruhm der deutschen Wissenschaft über die Welt getragen haben und auf das mit dem Verfasser alle deutschen Mathematiker stolz sein dürfen.[72]

---

[69] Ebd., S. 195.

[70] Ebd., S. 295.

[71] Übersichten über alle uns nach Auswertung von 121 verschiedenen Periodika bekannt gewordenen Rezensionen der *Mengenlehre* bzw. deren Nachauflage ([H 1935a]) finden sich in diesem Band, S. 409 bzw. S. 424. Im Anschluß an die jeweilige Liste sind einige ausgewählte Rezensionen abgedruckt, ferner HAUSDORFFS kurze Selbstanzeige von [H 1935a].

[72] [Hahn 1928], S. 58.

Möglicherweise hatte HAHN schon die besondere Gefahr des deutschen Antisemitismus im Auge, als er diese Zeilen schrieb.

HAUSDORFF hatte, wie bereits oben erwähnt, mit [H 1916] einen grundlegenden Beitrag zur Theorie der Borelschen Mengen geleistet. Die weitergehende Theorie der analytischen Mengen geht vor allem auf SUSLIN, LUSIN und SIERPIŃSKI zurück. Wie wichtig aber die erste zusammenfassende und besonders elegante und durchdachte Darstellung dieses neuen Stoffes in HAUSDORFFS *Mengenlehre* war, wird sehr schön aus HUREWICZ' Arbeit *Zur Theorie der analytischen Mengen* ([Hu 1930]) deutlich. HUREWICZ metrisiert zunächst die Menge der abgeschlossenen Teilmengen eines überabzählbaren kompakten metrischen Raumes R mittels der Hausdorffmetrik gemäß *Mengenlehre*, S. 145 ff. und konstruiert so einen neuen kompakten metrischen Raum $\mathcal{R}$, den „Potenzraum".[73] Sein Hauptergebnis besagt, daß die Teilmenge $\mathcal{M}$ des Potenzraumes, die aus allen überabzählbaren abgeschlossenen Mengen von R besteht, bezüglich $\mathcal{R}$ eine analytische Menge ist. Beim Begriff „analytische Menge" heißt es in einer Fußnote:

> Analytische Mengen = Souslinsche Mengen (A). Wegen der (hauptsächlich von LUSIN und SIERPIŃSKI entwickelten) Theorie der analytischen Mengen vgl. etwa HAUSDORFF, Mengenlehre, S. 177 ff. Die in der gegenwärtigen Arbeit zu benützenden Begriffe und Lehrsätze werden unten im § 1 zusammengestellt.[74]

Bei dieser Zusammenstellung wird in einer Fußnote angemerkt:

> Wir schließen uns dabei sehr eng an die Darstellung in Hausdorffs Mengenlehre an.[75]

Es wird dann noch mehrmals auf die *Mengenlehre* verwiesen; bei der LUSIN-SIERPIŃSKIschen Theorie der Indizes z. B. mit der Bemerkung:

> Die hier benützte Form der Definition stammt von HAUSDORFF (Mengenlehre, S. 187).[76]

Eine besondere Rolle bei der Rezeption der HAUSDORFFschen Ideen spielte eine der ersten mathematischen Spezialzeitschriften, die polnische Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae*.[77] Die *Fundamenta* publizierten Arbeiten zur Mengenlehre, Topologie, Theorie der reellen Funktionen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis, zur Logik und zu den Grundlagen der Mathematik. Waren die *Grundzüge der Mengenlehre* in den *Fundamenta* vom ersten Bande an mit bemerkenswerter Häufigkeit präsent, so trifft dies fast in gleicher Weise für die *Mengenlehre* ab deren Erscheinungsdatum zu: In den 20 Bänden von

---

[73] Heute als Hyperraum bezeichnet; s. dazu Band II dieser Edition, S. 762–766.
[74] [Hu 1930], S. 4.
[75] Ebd., S. 6.
[76] Ebd., S. 7.
[77] S. dazu auch Band II dieser Edition, S. 58–59.

9 (1927) bis 28 (1937) wurde das Buch in 70 von 590 insgesamt erschienenen Arbeiten zitiert, das entspricht einer Quote von 11,9 %.[78]

In einer Reihe von Arbeiten in den *Fundamenta* wird unmittelbar an die *Mengenlehre* angeknüpft. So hatte HAUSDORFF auf S. 90 die Frage aufgeworfen, ob es eine feste δs-Funktion $X = \Phi(M_1, M_2, \ldots)$ derart gibt, daß X genau alle von einem beliebig gegebenen Mengensystem $\mathcal{M}$ erzeugten Borelmengen durchläuft, wenn die M_i alle möglichen Mengen von $\mathcal{M}$ durchlaufen. Diese Frage griff SIERPIŃSKI noch im Erscheinungsjahr der *Mengenlehre* auf ([Si 1927]) und beantwortete sie negativ, indem er ein spezielles $\mathcal{M}$ angab (nämlich das System aller Teilmengen der Menge der irrationalen Zahlen $\in (0,1)$), für welches die Annahme der Existenz einer solchen δs-Funktion zum Widerspruch führt. In [Si 1930] werden von SIERPIŃSKI fünf Probleme gelöst, die TARSKI im Zusammenhang mit den HAUSDORFFschen δs-Funktionen (opérations de M. Hausdorff) gestellt hatte. Z. B. kann die Frage, ob die Iteration zweier δs-Funktionen wieder eine ist, bejaht werden, während die Frage, ob die Mengenklasse, die durch Vereinigung zweier durch verschiedene δs-Funktionen über demselben $\mathcal{M}$ erzeugter Mengenklassen entsteht, wieder durch eine δs-Funktion erzeugt werden kann, verneint werden muß. In [Si 1937] schließlich zeigt SIERPIŃSKI, daß es eine Mengenfunktion $f(M_1, M_2, \ldots)$ gibt (die natürlich keine δs-Funktion sein kann), welche genau die Borelmengen über $\mathcal{M}$ erzeugt, wenn die M_i beliebige Mengen aus $\mathcal{M}$ sind. Für die Konstruktion von f ist die HAUSDORFFsche δs-Funktion aus Satz II, S. 93 der *Mengenlehre* die Grundlage.

In [Ba 1931] greift STEFAN BANACH ebenfalls eine Anregung aus der *Mengenlehre* auf. Für reelle Funktionen auf einem metrischen Raum A hatte der Klassensatz gegolten: Die Funktionen der LEBESGUEschen Klasse (M^ξ, N^ξ) sind genau die BAIREschen Funktionen φ^ξ der Klasse ξ ([H 1927a], S. 255 ff.). Betrachtet man nun Funktionen in einem beliebigen metrischen Bildraum Y, so zeigt HAUSDORFF durch ein Gegenbeispiel, daß eine Funktion der Klasse $(M^1, N^1) = (F_\sigma, G_\delta)$ kein φ^1 zu sein braucht. Hieran schließt er die folgende Bemerkung an:

> Die Frage, in welchen Bildräumen Y oder für welche Paare von Räumen A, Y XII umkehrbar ist, verdient Untersuchung.[79]

BANACH widmet sich dieser Untersuchung und findet z. B., daß XII umkehrbar ist im Falle eines Banachraumes Y oder im Falle eines Raumes Y, in dem sich zwei beliebige Punkte stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen, hier allerdings für $\xi \neq 1$.

1931 und 1933 erschien in *Fundamenta* in zwei Teilen die umfangreiche Arbeit von L. KANTOROVITCH und E. LIVENSON *Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets.* In dieser Arbeit wird die wichtige Rolle der δs-Operation für die deskriptive Mengenlehre gezeigt, insbesondere auch für die

---

[78] Für die *Grundzüge* hatte die Quote in den ersten 20 Bänden der *Fundamenta* bei 15,8 % gelegen.

[79] [H 1927a], S. 269. Satz XII war die eine, für jedes Paar A, Y geltende Richtung des Klassensatzes: Die BAIREschen Funktionen φ^ξ sind von der Klasse (M^ξ, N^ξ).

Untersuchung projektiver Mengen. In zwei Vorläufernoten in den *Comptes Rendus* ([KL 1930a], [KL 1930b]) hatten KANTOROVITCH und LIVENSON folgendes gezeigt: Geht man vom System der abgeschlossenen Mengen eines geeigneten metrischen Raumes aus, so führt die ins Transfinite wiederholte Anwendung der δs-Operation, verbunden mit dem Übergang zum Komplement, stets nur auf projektive Mengen höchstens zweiter Stufe. In [KL 1931] haben die Autoren verschiedene Verallgemeinerungen und Modifikationen der δs-Operation untersucht und eine neue Klasse von Operationen, sogenannte positive analytische Operationen, eingeführt. Wenn diese über abzählbaren Mengensystemen operieren, sind sie mit HAUSDORFFs δs-Funktionen äquivalent; in der Einleitung heißt es, nachdem zunächst auf die SUSLINsche Operation verwiesen wurde:

> Then in 1927 Mr. HAUSDORFF and independently of him Mr. KOLMOGOROFF introduced a very wide class of analytical operations, called by Mr. HAUSDORFF *δs-operations*. [...] The importance of these operations is the consequence of their generality: every positive analytical operation on a countable infinity of sets is equivalent with a δs-function. Their theory is therefore in essence the most general theory of analytical operations on a countable infinity of sets.[80]

HAUSDORFF hat in [H 1933a] unmittelbar auf diese Arbeit reagiert und einen grundlegenden Projektionssatz von KANTOROVITCH/LIVENSON verallgemeinert und dessen Beweis ganz wesentlich vereinfacht.[81]

In [Ta 1936] hat A. TARSKI, an HAUSDORFFs *Mengenlehre* und an einschlägige Arbeiten von SIERPIŃSKI anknüpfend, die δs-Operation in folgender Weise verallgemeinert: Eine HAUSDORFFsche δs-Funktion über einem Mengensystem $\mathcal{M}$ ist durch eine Menge N von Folgen $\nu = \{\nu_\xi\}$ natürlicher Zahlen (d. h. $\nu_\xi < \omega = \omega_0$) definiert vermöge

$$X = \bigcup_{\nu \in N} \bigcap_{\nu_\xi \in \nu} M_{\nu_\xi}, \quad M_{\nu_\xi} \in \mathcal{M}\,.$$

TARSKI betrachtet statt der Mengen N Mengen Φ von Folgen $\varphi = \{\varphi_\xi\}$ von Ordinalzahlen $\varphi_\xi < \omega_\beta$ und kommt so zu „opérations de Hausdorff en degré β“ : Ist $\mathcal{M}$ ein vorgegebenes Mengensystem, so gehört zur Menge Φ die verallgemeinerte δs-Funktion vom Grade β

$$X = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcap_{\varphi_\xi \in \varphi} M_{\varphi_\xi}, \quad M_{\varphi_\xi} \in \mathcal{M}\,.$$

Die Klasse dieser Funktionen bezeichnet TARSKI mit $\mathcal{H}_\beta$; die HAUSDORFFsche Klasse der δs-Funktionen wäre dann gerade $\mathcal{H}_0$. Das Ziel von TARSKIs Arbeit ist es, Mengenklassen zu finden, die abgeschlossen sind gegenüber Operationen der Klasse $\mathcal{H}_\beta$ für gegebenes β und Eigenschaften dieser Mengenklassen zu studieren.

[80] [KL 1931], S. 216.
[81] S. dazu in diesem Band S. 471–478.

Als letztes Beispiel sei aus den Nachkriegsbänden der *Fundamenta* die Arbeit [Ale 1947] erwähnt. Sie geht unmittelbar von HAUSDORFFs Behandlung der Funktionenklassen, die durch Urbildmengen definiert sind, aus (*Mengenlehre*, S. 232 ff.). Sei X eine beliebige Menge, $\mathcal{H}$ ein σ-Ring von Teilmengen von X (*Mengenlehre*, S. 236), Y ein separabler metrischer Raum. Als „Hausdorff-Klasse" $\mathcal{H}^*$ bezeichnet ALEXIEWICZ die Menge aller Funktionen $f : X \to Y$, so daß gilt: Für jede offene Menge $G \subset Y$ gehört $\{x; f(x) \in G\}$ zu $\mathcal{H}$. Die Arbeit behandelt folgendes allgemeine Problem: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Grenzfunktion einer konvergenten Folge von Funktionen $f_n(x)$ einer gewissen Funktionenklasse $\mathcal{K}$ wieder in $\mathcal{K}$ liegt? Ist z. B. $\mathcal{K}$ die Klasse der stetigen reellen Funktionen einer reellen Variablen, liefert ein bekannter Satz von ARZELÀ die Antwort (quasigleichmäßige Konvergenz). ALEXIEWICZ untersucht das Problem für gewisse Hausdorff-Klassen $\mathcal{H}^*$.

1958 wurde die Theorie der Suslinmengen von LORENTZ und ZELLER erstmals in der Limitierungstheorie angewandt ([LoZe 1958]). Rückblickend schreibt LORENTZ darüber:

> I am not a stranger to analytic sets. In the 1930s I enjoyed the geometric exposition of the theory by Luzin [11], preferring it to the dry formulas of Hausdorff's book. But K. Zeller and I had to use the Hausdorff version when we wanted to apply it to summability.[82]

In die Rezeptionsgeschichte der *Mengenlehre* gehört auch die unter HAUSDORFFs Leitung angefertigte Dissertation von GUSTAV STEINBACH aus dem Jahre 1930. Alle wichtigen Sätze über Borel- und Suslinmengen bezogen sich in ihrer ursprünglichen Form auf Mengen in euklidischen Räumen oder auf Mengen im Baire-Raum der Irrationalzahlen (z. B. in LUSINs *Leçons*). HAUSDORFF hat sich in der *Mengenlehre* sehr darum bemüht, möglichst allgemeine Räume zugrunde zu legen, meist beliebige polnische Räume. In diese Richtung zielt auch die Dissertation von STEINBACH. So wird dort der LUSINsche Begriff der Universalmenge eines Mengensystems von einem euklidischen Raum auf einen metrischen Raum X verallgemeinert: Eine Universalmenge in X wird im Produktraum $X \times Y$ mit $Y = \mathbb{R}$ definiert; die Räume y =const. übernehmen dabei die Rolle der euklidischen Räume, mit denen im LUSINschen Fall die Universalmenge geschnitten wird.

Die von LUSIN eingeführten projektiven Mengen waren durch Projektionen in euklidischen Räumen definiert. Um sie auf polnische Räume zu verallgemeinern, führte STEINBACH anstelle der Projektionen geeignete Abbildungseigenschaften ein.

Die von HAUSDORFF eingeleitete Tendenz, topologisch möglichst allgemeine Versionen der einschlägigen Resultate zu finden, wurde unter seiner Anleitung von STEINBACH fruchtbringend weiterverfolgt. Die Dissertationsschrift STEINBACHs hat HAUSDORFF mit „sehr gut" bewertet. Später hat man herausgefunden, daß manche Resultate der deskriptiven Mengenlehre auch in nicht sepa-

[82] [Lo 2001], S. 29. [11] ist [Lu 1930a].

rablen und sogar in nicht vollständigen Räumen gelten. Auch die Ausweitung von den polnischen Räumen auf kompakte Hausdorff-Räume hat interessante Ergebnisse gezeitigt.[83]

Die erste umfassende Monographie zur allgemeinen (mengentheoretischen) Topologie war KURATOWSKIS *Topologie I* ([Ku 1933]).[84] Im Vorwort nennt KURATOWSKI als Quellen an erster Stelle HAUSDORFFS Bücher:

> Parmi les livres sur la Topologie dont je me suis servi en rédigeant ce volume et dont la valeur ne se réduit pas seulement à leur intérêt historique, sont à citer: F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit 1914, et *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, Gruyter 1927.[85]

Es folgen dann in dieser Reihenfolge SIERPIŃSKIS *Zarys teorji mnogości II (Topologia ogolna)* (1928) und FRÉCHETS *Les espaces abstraits* (1928). In KURATOWSKIS Buch werden nur vier Autoren mehr als 20 mal zitiert: Sein Lehrer SIERPIŃSKI, dem das Buch gewidmet ist (51 mal), HAUSDORFF (40), LUSIN (26) und URYSOHN (25). Von den 40 Verweisen auf Werke HAUSDORFFS betreffen 22 die *Mengenlehre*.

Schließlich sei noch erwähnt, daß A. N. KOLMOGOROFF in seiner grundlegenden Arbeit zur Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ([Kol 1933]) mehrfach auf HAUSDORFFS *Mengenlehre* zurückgegriffen hat (Begriff des Mengenkörpers, des σ-Körpers und des Borelschen Systems).

Die *Mengenlehre* war offenbar auch buchhändlerisch ein Erfolg. Es gab mindestens einen unveränderten Nachdruck, denn es gibt Exemplare, die zwar als Ausgabedatum 1927 angeben, in die aber eine Übersicht über Göschens Lehrbücherei fest eingebunden ist, die bis 1931 reicht. 1935 gab es eine Neuauflage der *Mengenlehre*; s. u. Abschnitt 6.

5. Hausdorff und Lusin

LUSINS schon mehrfach erwähntes Buch *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications* ([Lu 1930a]) gab eine zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen über Borelsche und projektive Mengen seit LEBESGUES grundlegender Arbeit [Le 1905] bis zum Ende der zwanziger Jahre. In der Besprechung des LUSINschen Werkes im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (1930, S. 85) hatte kein Geringerer als JOHANN VON NEUMANN geschrieben:

> Die vom Verf. und *M. Suslin* geschaffene Theorie der analytischen Mengen ist eine der wichtigsten Etappen im Fortschritt der Punktmengentheorie und ein heute bereits in den Hauptzügen fertiges und übersehbares Lehrgebäude. Da die Originalliteratur unübersichtlich ist, ist das Bedürfnis nach einer zusammenfassenden Darstellung des Gegenstandes dringend. (In deutscher Sprache ist seit einigen Jahren die vorzügliche Zusammenfassung in *Hausdorff*s Mengenlehre (2. Aufl. 1927; F. d. M. 53, 169) vorhanden; jedoch ist bei der Wichtigkeit dieser Disziplin eine monographische Darstellung nichtsdestoweniger erwünscht.)

---

[83] S. dazu [R 1980], S. 8–9.
[84] S. näheres dazu im Band II dieser Edition, S. 64–65.
[85] [Ku 1933], S. IX.

Diese Parallelität von größeren Teilen der HAUSDORFFschen *Mengenlehre* und LUSINs Monographie sowie die zeitliche Nähe beider Werke mag es rechtfertigen, dem Vergleich dieser beiden bedeutenden Mathematiker im Hinblick auf ihre mengentheoretischen Interessen einige Zeilen zu widmen.

HAUSDORFF und LUSIN gehören zu den Gelehrten, welche in der Ära nach CANTOR bedeutende Beiträge zur Weiterentwicklung der klassischen Mengenlehre und ihrer Anwendungen geleistet haben. Ihr Zugang zu dieser Thematik war jedoch denkbar verschieden: Während HAUSDORFF als etwa 30-jähriger nach Publikationen auf ganz disparaten und von der Mengenlehre weit entfernten Gebieten durch seine philosophischen Interessen schließlich zur Mengenlehre geführt wurde[86], hat LUSIN schon als Student unter D. F. JEGOROFF in Moskau und in Paris unter dem Einfluß der französischen Schule (BAIRE, BOREL, LEBESGUE) die Bedeutung der Theorie der Punktmengen für sein Hauptinteressengebiet, die Theorie der reellen Funktionen, erkannt. Er hatte auf diesem Gebiet auch sofort großen Erfolg; bereits seine Dissertation *Integral i trigonometricheskij rjad* (Integral und trigonometrische Reihe, Moskau 1915) hat ihn als bedeutenden Mathematiker weithin bekannt gemacht.

HAUSDORFFs und LUSINs Interessen innerhalb der Mengenlehre waren ziemlich verschieden, aber nicht ohne einige bemerkenswerte Berührungspunkte. Die Herausgeber des Bandes II von LUSINs *Gesammelten Werken* ([Lu 1958]) haben in seinen mengentheoretischen Untersuchungen folgende drei Richtungen unterschieden:

(I) Borelsche und projektive Mengen reeller Zahlen, speziell Mengen der ersten und zweiten Stufe der projektiven Hierarchie;

(II) ω_1-Folgen, erzeugt durch die LUSINsche Sieboperation und ähnliche „effektive“ Konstruktionen;

(III) verschiedene Typen von Mengen und transfiniten Folgen, deren Existenz das Auswahlaxiom voraussetzt – ein mehr marginaler Punkt.

Erwähnt werden sollte auch LUSINs tiefes Interesse an Grundlagenfragen der Mathematik. Er teilte z. B. in bezug auf das Auswahlaxiom die Skepsis der französischen „Halbintuitionisten“.[87] HAUSDORFF dagegen hat das Auswahlaxiom ganz selbstverständlich benutzt, sogar ohne es explizit zu erwähnen.[88]

HAUSDORFFs mengentheoretische Untersuchungen lassen sich nicht so einfach klassifizieren; sie überdecken, wenn man den Nachlaß mit einbezieht[89],

---

[86] HAUSDORFFs Weg zur Mengenlehre ist ausführlich im Band II dieser Edition, S. 2–16, dargestellt.

[87] Vgl. dazu LUSINs Vortrag *Sur les voies de la théorie des ensembles* ([Lu 1928]) auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1928 in Bologna; s. ferner [Mo 1982], S. 92 ff. und insbesondere S. 288.

[88] Z. B. bei der Konstruktion seiner paradoxen Kugelzerlegung in [H 1914a] und [H 1914b]; s. Band IV dieser Edition, S. 9.

[89] HAUSDORFF stellte offenbar sehr hohe Anforderungen an eigene Publikationen; eine Reihe von Stücken aus seinem Nachlaß hätte zu seiner Zeit zu einflußreichen Publikationen führen können (z. B. Fasz. 223, s. Band IV dieser Edition, S. 317–323, und diesen Band, S. 750–754.

buchstäblich die gesamte zeitgenössische Mengenlehre mit Ausnahme logischer und metamathematischer Untersuchungen. Trotzdem kann man einige Hauptrichtungen herausheben:

(A) Geordnete Mengen (Konfinalität, reguläre und singuläre Zahlen, Element- und Lückencharaktere, saturierte Strukturen, Halbordnung);

(B) Arithmetik transfiniter Zahlen und Ordnungstypen (Hausdorffsche Rekursionsformel, verallgemeinerte Kontinuumhypothese, allgemeine geordnete Produkte und Potenzen);

(C) Studium der Du Bois-Reymondschen finalen Halbordnung bei Folgen und Funktionen – hierzu gehört eines seiner tiefsten Resultate in der Mengenlehre, der Beweis der Existenz von (ω_1, ω_1)-Lücken;

(D) Borelsche, Suslinsche und co-Suslinsche Mengen in metrischen Räumen;

(E) Struktur von Mengenringen und Funktionenfamilien, speziell Borelmengen und Bairesche Funktionen;

(F) δs-Operationen über Mengensystemen.

(D), (E), (F) sowie die elementareren Teile von (A), (B) bilden den Hauptteil des Inhalts der *Mengenlehre* (bzw. ihrer etwas erweiterten Nachauflage [H 1935a]). Einige andere Abschnitte des Buches, wie die Theorie der Kontinua, zählt man heute mehr zur Topologie als zur Mengenlehre.

Wir betrachten im folgenden die Beziehungen zwischen Hausdorffs und Lusins Untersuchungen und insbesondere die zwischen Hausdorffs *Mengenlehre* und Lusins *Leçons*.

Was (I) betrifft, so hat Lusin oft das Theorem von Alexandroff und Hausdorff über die Existenz perfekter Teilmengen in überabzählbaren Borelmengen zitiert. Dieses Resultat, unabhängig voneinander in [Al 1916] und [H 1916] erzielt, war zweifellos ein Ausgangspunkt für die weitere Entwicklung der deskriptiven Mengenlehre, vor allem in Rußland. In der Tat wurde Suslin, indem er Alexandroffs Konstruktion verbesserte, zur Entdeckung der Suslinmengen und zu den darauf folgenden Untersuchungen geführt (und mit ihm Lusin als Lehrer von Alexandroff und Suslin).[90]

Hausdorff definierte und untersuchte einige transfinite Folgen vom Typ (II) in [H 1936b] als Teil seines Programmes (C), aber unter anderen Gesichtspunkten und mit anderen Resultaten als in den zum Punkt (II) gehörigen Arbeiten Lusins.

Was (III) betrifft, so ist die Konstruktion von (ω_1, ω_1)-Lücken in Lusins Arbeit [Lu 1946] wesentlich auf dieselbe Idee gegründet, die Hausdorff in [H 1936b] zu seiner Konstruktion geführt hatte; man kann aber nicht von einer wörtlichen Reproduktion sprechen. Lusins erste kürzere Note dazu in Französisch ([Lu 1943]) zitiert als einzige fremde Arbeit [H 1936b], aber ohne

[90] Genaueres im Kommentar zu [H 1916], dieser Band, S. 439–442.

speziellen Bezug darauf im Text und mit nicht ganz korrekten bibliographischen Daten.[91] Die auf [Lu 1943] folgende o. g. längere Arbeit [Lu 1946] enthält keinerlei Hinweis mehr auf Hausdorff.[92] Man kann dies verschieden interpretieren, aber vielleicht handelte Lusin vor dem Hintergrund seiner eigenen Verfolgungsgeschichte unter Stalin in den späten dreißiger Jahren, als man ihm u. a. unangemessen enge Kontakte zu ausländischen Kollegen vorwarf.[93]

Hausdorff hat in seinem Buch *Mengenlehre* viel Mühe darauf verwandt, die Resultate Lusins und seiner Schule auf dem Gebiet der deskriptiven Mengenlehre, insbesondere aus dem unter (D) angeführten Themenkreis, zu verallgemeinern und zu verbreiten. Die *Mengenlehre* erschöpft aber nicht den gesamten Inhalt von Lusins *Leçons*, präsentiert jedoch das, was man den Kernbereich der klassischen deskriptiven Mengenlehre nennen kann: die grundlegenden Resultate über Borel-, Suslin- und co-Suslinmengen in separablen metrischen Räumen. Beiseite gelassen hat Hausdorff einige wichtige Themenbereiche, die später in den *Leçons* sehr gut dargestellt sind, wie projektive Mengen und die Struktur der Klassen und Teilklassen der Borelschen Hierarchie.

Dies im Blick sollen im folgenden noch einige Bemerkungen zum Vergleich zwischen Lusins Arbeiten aus den zwanziger Jahren und seinen *Leçons* einerseits und dem deskriptiv-mengentheoretischen Teil der *Mengenlehre* [H 1927a] andererseits angeschlossen werden.

1) Hausdorff präsentierte die deskriptive Mengenlehre in einer Form, die auf alle separablen metrischen Räume anwendbar ist. Diese allgemeine Form ist eine von Hausdorffs originellen Leistungen in seiner *Mengenlehre*. Lusin hat in den *Leçons* nur den Fall der reellen Zahlen und hauptsächlich nur den Baire-Raum der irrationalen Zahlen betrachtet. Hausdorffs Verallgemeinerung ist durchaus nicht trivial: einige grundlegende Resultate beruhen auf seinem bemerkenswerten Theorem, daß G_δ-Mengen in einem vollständigen metrischen Raum selbst vollständig metrisierbar sind ([H 1924]; s. diesen Band, S. 443-453).

2) Hausdorff hat Lusins etwas weitschweifigen Stil wesentlich modernisiert. Lusin bevorzugte eine mehr geometrische Art der Darstellung, welche nicht immer mit dem Inhalt harmonierte und zu unnötig langen und umständlichen Argumentationen sowohl in den *Leçons* als auch in seinen früheren Arbeiten [Lu 1926], [Lu 1927] führte. Hausdorffs Darstellung des damals aktuellen Standes der deskriptiven Mengenlehre in [H 1927a] bzw. [H 1935a] war viel moderner und kompakter. Dies mag auch die Ursache dafür gewesen sein, daß Lusins *Leçons*, obwohl sie das Gebiet der deskriptiven Mengenlehre umfassender überdeckten und obwohl Lusin und seine Schule weit mehr an originellen Re-

---

[91] Der Verweis auf Hausdorff wurde in der russischen Übersetzung in Lusins Gesammelten Werken ([Lu 1958]) ganz weggelassen.

[92] Übrigens gab Lusin hier auch eine andere Realisierung des gleichen (ω_1, ω_1)-Lücken-Phänomens, und zwar in der Form orthogonaler, aber inseparabler transfiniter Folgen. Genaueres findet sich im Kommentar zu [H 1936b] im Band I dieser Edition.

[93] Lusin befand sich zeitweise in einer für ihn lebensgefährlichen Situation; s. dazu das Buch [DL 1999], in dem einschlägige Dokumente des „Falles Lusin“ veröffentlicht sind; s. ferner [Pa 1997].

sultaten auf diesem Gebiet erzielt hatten als HAUSDORFF, dessen *Mengenlehre* nicht überschattet haben. Wenn man als Beleg wieder die wichtigste einschlägige Zeitschrift, die *Fundamenta Mathematicae*, heranzieht, und etwa die ersten 20 Bände nach Erscheinen von LUSINs Buch analysiert, ergibt sich folgendes: Die *Leçons* werden in 28 der in diesen Bänden enthaltenen 590 Arbeiten zitiert, HAUSDORFFs Werk in 58 Arbeiten. Von diesen 58 Arbeiten kann man mindestens 23 der deskriptiven Mengenlehre zurechnen. Selbst SIERPIŃSKI, enger Freund und zeitweise Mitarbeiter LUSINs, griff in [Si 1933] bei der Darstellung LUSINscher Ideen nicht auf [Lu 1930a], sondern auf HAUSDORFFs *Mengenlehre* zurück. So fügte er den Beweisen zweier wichtiger Theoreme folgende Fußnoten an:

> La démonstration est basée sur une idée de M. Lusin; cf. F. Hausdorff, Mengenlehre (1927), p. 276.[94]
>
> Ici aussi l'idée de la démonstration est due à M. Lusin. Cf. F. Hausdorff, l. c., p. 277.[95]

3) In allen größeren Publikationen und in seinen *Leçons* widmete LUSIN philosophischen Erörterungen über die Grundlagen der Mathematik, speziell über das Wesen mathematischer Definitionen, Resultate und Schlußweisen sowie über das Auswahlaxiom viel Raum. HAUSDORFF hat solche Erörterungen in seinen Büchern über Mengenlehre vermieden (mit Ausnahme einiger weniger Bemerkungen zum Mengenbegriff), obwohl er selbst ein eigenständiger philosophischer Denker war und sich auch mit Grundlagenfragen auseinandergesetzt hatte.[96] Es gibt keine direkten Reaktionen HAUSDORFFs auf LUSINs philosophische Exkurse, wohl aber eine sehr kritische Bemerkung ALEXANDROFFs in einem Brief an HAUSDORFF. Damit hatte es folgende Bewandtnis: Nachdem das Kontinuumproblem für Suslinmengen gelöst war, hatte LUSIN vergeblich versucht, es auch für Suslinkomplemente zu lösen. Dazu bemerkte er in [Lu 1925a]:

> Les efforts que j'ai faits pour résoudre cette question m'ont conduit à ce résultat tout inattendu: *il existe une famille admettant une application sur le continu d'ensembles effectifs telle qu'on ne sait pas* et l'on ne saura jamais *si un ensemble quelconque de cette famille (supposé non dénombrable) a la puissance du continu*, [$\cdots$][97]

In einer weiteren Note ([Lu 1925b]) hat LUSIN ein solches „Ignorabimus" auch für Projektionen von Suslinkomplementen ausgesprochen. ALEXANDROFF reagierte in einem Brief an HAUSDORFF vom 29. 11. 1925 darauf mit folgender Bemerkung:

[94] [Si 1933], S. 265.

[95] Ebd., S. 269.

[96] Zu Grundlagenfragen der Mathematik s. den Kommentar zu [H 1905] im Band I dieser Edition, ferner Band VI dieser Edition und Band II, S. 27–29, 53–55. Dem philosophischen Werk HAUSDORFFs ist Band VII dieser Edition gewidmet.

[97] [Lu 1925a], S. 1572. Es ist bemerkenswert, daß die Frage nach der Existenz perfekter Teilmengen in überabzählbaren Suslinkomplementen die Beweismöglichkeiten der Zermelo-Fraenkelschen Axiome übersteigt; s. dazu [Koe 1996], S. 93–95.

> Was die Lusinschen Noten betrifft, so macht auf mich einen besonders unbegreiflichen Eindruck dieses „nous ne savons pas et nous ne saurons jamais" – das ist ja zum ersten mal, daß man in der Mathematik so ein „Ignorabimus" deklariert, und dabei es gar nicht [zu] begründen versucht [· · ·]
>
> Mir tut es auch Leid, daß LUSIN, dessen Geisteskraft ich ja sehr gut kenne, sich jetzt mit solchen Sachen begnügt.[98]

ALEXANDROFF hätte eine solche doch ziemlich scharfe Formulierung wohl kaum gewählt, wäre er nicht der Meinung gewesen, daß HAUSDORFF (wie übrigens auch HILBERT) ein „Ignorabimus" in der Mathematik ablehnte.

4) Was die Borelmengen betrifft, war LUSIN auf die DE LA VALLÉE-POUSSINsche Hierarchie fokussiert, die sich auf die Operation des mengentheoretischen Limes gründet. Der Grund hierfür lag wohl nicht zuletzt darin, daß hier gewisse Analogien mit der Limesbildung im Bereich der reellen Zahlen bestehen. HAUSDORFF schuf seine eigene Hierarchie der Klassen F, G, F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, ..., basierend auf abzählbaren Vereinigungen und abzählbaren Durchschnitten; sie wurde zum Prototyp der modernen Systematik.

Die unter (E) aufgeführte Thematik war von Beginn an bis in die späten dreißiger Jahre ein ständiger Gegenstand von HAUSDORFFs Aufmerksamkeit. LUSIN war daran nur insoweit interessiert, als Borelmengen und Bairesche Funktionen tangiert waren. HAUSDORFF seinerseits hat sich mit LUSINs Arbeit [Lu 1930b] und den entsprechenden Kapiteln in den *Leçons* eingehend beschäftigt; im Nachlaß finden sich dazu zahlreiche Untersuchungen, wovon einige in diesem Band abgedruckt sind.[99]

Ziemlich überraschend ist, daß LUSIN die Richtung (F) vollkommen ignorierte. 1921 hat A. N. KOLMOGOROFF, damals ein achtzehnjäriger Student unter LUSIN, eine brilliante Untersuchung der δs-Operationen vorgelegt, die SIERPIŃSKIs und HAUSDORFFs gleichzeitige Studien in einigen Punkten übertraf. Der erste Teil dieser Arbeit wurde in [Kol 1928] publiziert, der zweite, weit bedeutendere erst in [Kol 1993]. KOLMOGOROFF selbst hat 1985 in seinen Kommentaren für seine Gesammelten Werke erwähnt, daß LUSIN mit dieser Untersuchungsrichtung überhaupt nicht einverstanden war.[100]

6. Die Neuauflage von 1935. Übersetzungen

Am 2. Oktober 1934 fand im Verlag de Gruyter eine Lektorenkonferenz statt. Im Protokoll wird zu HAUSDORFFs Buch festgestellt:

> Hausdorff, Mengenlehre geht zu Ende. Neue Auflage machen oder anastatischen Nachdruck?
>
> Beschlossen: 500 Expl. anastatisch nachdrucken.[101]

[98] NL HAUSDORFF: Kapsel 61, Brief vom 29. 11. 1925.
[99] S. 588 ff, S. 626 ff.
[100] S. dazu auch den Kommentar zu [H 1933a], dieser Band, S. 478.
[101] Staatsbibliothek zu Berlin, Dep. 42 (Archiv de Gruyter), 461.

Hausdorff hat aber, „um den inzwischen erzielten Fortschritten wenigstens teilweise gerecht zu werden“ [102], die Verlagsleitung offenbar überzeugen können, dem Nachdruck ein zehntes Kapitel hinzuzufügen und das Quellen- und Literaturverzeichnis zu aktualisieren. So erschien das Werk 1935 in einer neuen Auflage. Die meisten Rezensionen der Neuauflage waren kurz und verwiesen auf frühere Besprechungen der Ausgabe von 1927, in einigen auch mit einem Hinweis auf den bisherigen großen Erfolg des Werkes. So schrieb z. B. Erich Kamke im Jahresbericht der DMV:

> Nur acht Jahre nach Erscheinen der zweiten Auflage ist schon eine Neuauflage dieses Standardwerkes der Mengenlehre nötig geworden. Das ist angesichts des keineswegs immer einfachen Gegestandes des Werkes ein so großer Erfolg, daß jedes weitere empfehlende Wort überflüssig ist.[103]

Es gab zwei ausführlichere Rezensionen, beide von bedeutenden Fachleuten auf dem Gebiet der Mengenlehre, nämlich von Thoralf Skolem und von Giulio Vivanti; beide sind in deutscher Übersetzung in diesem Band, S. 425–428, abgedruckt.

Mitte 1939 war auch von der Nachauflage nur noch ein geringer Bestand vorhanden. Darauf bezieht sich die im folgenden vollständig abgedruckte Aktennotiz aus dem Verlagsarchiv, die keines weiteren Kommentars bedarf.[104]

> Berlin, den 12. Sept.
>
> „Hausdorff, Mengenlehre“ (Göschens Lehrbücherei Band 7)
>
> Die Bestände der 3. Auflage dieses Werkes gehen zu Ende. Wir haben aber Bedenken eine neue Auflage zu veranstalten, da Hausdorff Jude ist und wir befürchten müssen, daß uns durch den Nachdruck Unannehmlichkeiten entstehen könnten.
>
> In der Verlagskonferenz vom 1. Aug. 1939 wurde der Beschluß gefaßt, nach einem neuen Autor Umschau zu halten; da es aber sicher einer längeren Zeit bedarf, bis das neue Manuskript vorliegen kann, wollten wir uns einmal mit Herrn Professor Bieberbach in Verbindung setzen und dessen Meinung einholen, ob wir es riskieren könnten einen weiteren kleinen Manuldruck des Hausdorff'schen Buches zu veranstalten, eventuell mit der alten Jahreszahl. Herr Bieberbach riet von einer solchen Auffrischung des Buches dringend ab.
>
> Als neue Autoren empfahl Herr Geheimrat Haußner die Herren Tietze – München, Beck – Bonn und Herbert Seifert sowie hauptsächlich Tornier. Herr Professor Bieberbach rät von Tietze und Beck ab. Seifert scheidet

[102] [H 1935a], S. 6.

[103] [Ka 1936], S. *25*.

[104] Der Rand des Schriftstücks ist z. T. abgerissen. Die fehlenden Buchstaben oder Wortteile ergeben sich jedoch eindeutig aus dem vorhandenen Text bis auf das durch [1] gekennzeichnete Wort. Es kann nicht „speziellen“ geheißen haben, da der Leerraum nach dem Wort „speziell“ noch deutlich sichtbar ist. Vermutlich hat dort „jüdischen“ gestanden; dies würde sich aus dem Zusammenhang am ehesten ergeben, zumal die Mengenlehre von Bieberbach und seinen Anhängern als typisch jüdisch charakterisiert wurde. Zu L. Bieberbach s. [Me 1987].

> aus, weil er der Mitarbeiter an der „Threllfallschen Topologie“ ist, die wir nach Krach seinerzeit ablehnten. Tornier kommt nicht mehr in Frage, da er, obwohl strenger Parteigen., seines Amtes enthoben wurde.
>
> Herr Bieberbach nannte nun als geeigneten Autor Perron – München. Wenn wir uns an diesen wenden, so begeben wir uns in gewisse Gefahr, denn Herr P. wird sich bei dieser speziell [1] Wissenschaft keinen Zwang auferlegen und Juden nach Herzenslust zitieren. Ich erinnere dabei an die Korrespondenz, die wir in dieser Beziehung mit ihm wegen der neuen Auflage von Göschens Lehrbücherei Band 1 führten.
>
> Neuerdings schrieb Herr Geheimrat Haußner: „Daß Sie sich wegen einer Mengenlehre überhaupt um jemanden bemühen, könnte leicht etwas hinausgeschoben werden, bis klar zu übersehen ist, ob auch unter den jetzigen Verhältnissen die Mengenlehre eine solche Beachtung und Wertschätzung findet wie bisher.“
>
> Vielleicht empfiehlt es sich wegen eines Bearbeiters einmal die Schriftleitung des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik zu befragen, die ja im Bilde sein muß, wer sich auf dem Gebiet besonders betätigt.
>
> Grethlein[105]
>
> In der Unterredung mit Herrn Cram am 28. September 1939 wurde beschlossen, mit der Neubesetzung zunächst zuzuwarten.[106]

Von Hausdorffs *Mengenlehre* gab es eine russische und eine englische Ausgabe. Die russische Ausgabe erschien 1937 unter Hausdorffs Namen und unter dem Titel „Mengenlehre“ (Teoria mnoshestvch). Als verantwortliche Redakteure dieser Ausgabe fungierten P. Alexandroff und A. Kolmogoroff. Allerdings – und das ist in der Geschichte der mathematischen Literatur ein ziemlich ungewöhnlicher Fall – erschien hier unter Hausdorffs Namen ein Buch, welches er so nicht geschrieben hatte. Der Sachverhalt wird am besten deutlich, indem wir im folgenden das Vorwort der Redakteure in deutscher Übersetzung abdrucken:

> Vorwort zur russischen Ausgabe
>
> Die „Mengenlehre“ Hausdorffs gehört zum Bestand jener einzigartigen klassischen Werke der mathematischen Literatur, welche nicht nur die Bilanz einer ganzen Periode in der Entwicklung der jeweiligen Disziplin ziehen, sondern auch die Wege der künftigen Entwicklung skizzieren.
>
> Wenn man von der „Mengenlehre“ Hausdorffs spricht, so hat man eigentlich zwei Bücher im Auge: die erste Auflage, erschienen 1914 unter dem Titel „Grundzüge der Mengenlehre“, und die zweite Auflage, erschienen 1927 und einfach als „Mengenlehre“ betitelt. Die beiden Bücher unterscheiden sich in ihrem Inhalt derartig stark voneinander, daß man sie

[105] Die Unterschrift ist abgekürzt; aus dem Vergleich mit anderen Dokumenten mit der Unterschrift von Grethlein wird klar, daß es Grethlein heißen muß.

[106] Staatsbibliothek zu Berlin, Dep. 42 (Archiv de Gruyter), 227. Das Dokument liegt in einer Mappe „Herrn Geheimrat Haußner bereits unterbreitet“. Robert Haussner (1863–1948) war von 1905 bis 1934 Ordinarius in Jena, danach Emeritus. Er fungierte seit den zwanziger Jahren als Berater von de Gruyter für Göschens Lehrbücherei. Haußner gehörte politisch der extremen Rechten an, s. [Hag 1997], S. 166 ff.

als zwei verschiedene Werke betrachten muß und nicht als zwei Auflagen ein und desselben Buches. Die wesentlichen Unterschiede der beiden Bücher bestehen in folgendem: 1° Die Theorie der topologischen Räume, welche die Grundlage der Darstellung in der ersten Auflage ist und die erstmalig von HAUSDORFF systematisch ausgearbeitet wurde, ist in der zweiten Auflage nur in einem Paragraphen dargestellt: die gesamte Theorie der Punktmengen ist in der zweiten Auflage nur für metrische Räume durchgeführt; 2° In der zweiten Auflage fehlen die Theorie des Maßes und des Lebesgueschen Integrals, aber auch die Topologie der Euklidischen Ebene und des n-dimensionalen Raumes; 3° Hinzugefügt ist in der zweiten Auflage – und zwar in meisterhafter Ausführung – die Theorie der A-Mengen von SUSLIN (in der vorliegenden Übersetzung werden diese Mengen in Übereinstimmung mit der von HAUSDORFF eingeführten Terminologie als Suslinsche Mengen bezeichnet nach ihrem Entdecker M. J. SUSLIN (geb. 1894, gest. 1919)).

Die Gründe, welche den Autor in der zweiten Auflage zum Verzicht auf so umfangreiches Material aus der ersten Auflage bewogen haben, hat er im Vorwort zur zweiten Auflage genannt: sie bestehen im wesentlichen in der Forderung des Verlages gegenüber dem Autor, den Umfang einzuschränken. Zweifellos ist der Verzicht auf den *topologischen* Aufbau der Punktmengenlehre, welcher eine der glanzvollsten Errungenschaften der ersten Auflage des HAUSDORFFschen Buches war, der größte Verlust: der Autor selbst spricht in seinem Vorwort mit sichtlichem Bedauern von der Notwendigkeit, so zu verfahren.

Die Redakteure der russischen Übersetzung haben den Entschluß gefaßt, diese Einbuße rückgängig zu machen, die das Buch aus äußeren Gründen erlitten hatte: unterstützt in dieser Beziehung vom Verlag ONTI, haben sie beschlossen, zum topologischen Standpunkt zurückzukehren, auf den sich zurecht der ausgezeichnete Ruf der ersten Auflage des Buches gründet. Wir haben also den Versuch gemacht, die großen Vorzüge der zweiten Auflage – Vorzüge, die vor allem in der logischen Vollendung und in der Geschliffenheit (otschlifovka) des gesamten Materials bestehen – mit den Vorzügen der ersten Auflage zu verbinden. Allerdings war das gesteckte Ziel durch mechanische Übertragung des Textes der ersten Auflage nicht zu erreichen: eben diese erste Auflage war der Stimulus einer gewaltigen Entwicklung der Theorie der topologischen Räume mit dem Ergebnis, daß diese Theorie überhaupt nicht mehr so aussieht, wie sie 1914 aussah, als die erste Auflage des HAUSDORFFschen Buches erschien. Bei der Umarbeitung derjenigen Kapitel der ersten Auflage, welche der allgemeinen (topologischen) Mengenlehre gewidmet sind, mußten wir diese somit dem gegenwärtigen Stand der Theorie der topologischen Räume anpassen. Eine dieser Forderung entsprechende Darstellung der Theorie war schon von einem von uns in dem Buch ALEXANDROFF und HOPF, Topologie I (Kapitel I und II) vorgelegt worden. Von dieser Darstellung wurde natürlich (bei einigen Kürzungen) Gebrauch gemacht. Die schwierige Aufgabe der Vereinigung dieses Stoffes mit dem übrigen Stoff des HAUSDORFFschen Buches, seine Einfügung in den vorgegebenen Rahmen dieses Buches, die Verschmelzung mit den übrigen Kapiteln HAUSDORFFS zu einem Ganzen, hat N. B. Vedenisoff auf sich genommen und, wie uns scheint, vortrefflich gelöst. Diese gesamte Arbeit, die natürlich den Rahmen einer üblichen Übersetzungsarbeit weit übersteigt, ist von Vedenisoff unter unserer ständigen redaktionellen Mitwirkung durchgeführt worden und selbstverständlich *vollständig unter unserer und nur unter unserer Verantwortung.*[107]

Außerdem wurden, entsprechend den neuesten Untersuchungen von Hausdorff selbst, von A. N. Kolmogoroff, L. W. Kantorovitch und E. M. Livenson, die Paragraphen umgearbeitet, welche sich auf Mengenoperationen und ihre Anwendungen beziehen. Es scheint uns, daß diese Umarbeitung im Geiste der generellen Absichten des Hausdorffschen Buches erfolgt ist.

Schließlich hielten wir es für zweckmäßig, dem Buch in Form eines besonderen Anhangs eine Übersetzung von Hausdorffs Artikel über lineare Räume anzufügen.[108] Im letzten Moment haben wir erfahren, daß auch Hausdorff sich entschieden hat, in der dritten deutschen Auflage ein Kapitel einzufügen, welches diesem Gegenstand gewidmet ist.[109] Somit hoffen wir, daß ungeachtet dessen, daß das Hausdorffsche Buch, wie sich aus dem Gesagten ergibt, unter unseren Händen eine beträchtliche Umarbeitung erfahren hat, der wahre Geist des Originals in vollem Maße erhalten geblieben ist. Unsere Aufgabe war es, in die Hände des sowjetischen Lesers ein Buch zu legen, welches im großen und ganzen sowohl die erste als auch die zweite Auflage des Hausdorffschen Buches ersetzt, dabei aber denjenigen Teil des Originals beibehält, der beibehalten werden konnte, weil er sich auf dem aktuellen Stand der Mengenlehre befindet. Wenn diese Aufgabe von uns einigermaßen zufriedenstellend gelöst worden ist, dann hält der Leser in der Tat einen gründlichen Leitfaden der Mengenlehre in Händen. Durch dessen Studium wird er sich für die Lektüre beliebiger Spezialliteratur in dieser Disziplin vollständig vorbereitet zeigen und er wird nach Kräften an deren fernerer Ausarbeitung teilnehmen können.

Bolschewo-Komarovka — *P. Alexandroff*
7. August 1936 — *A. Kolmogoroff*

Ein näherer Vergleich der russischen Ausgabe mit [H 1927a] zeigt folgendes: Die Kapitel I–IV der russischen Ausgabe sind im wesentlichen wörtliche Übersetzungen der entsprechenden Kapitel der *Mengenlehre*. Im Kapitel V gibt es

[107] Die von Alexandroff und Kolmogoroff durch Kursivdruck hervorgehobene Passage ist wohl nur verständlich, wenn man bedenkt, daß im Juli 1936 eine groß angelegte Pressekampagne gegen Lusin stattfand. Da Lusin der führende Mengentheoretiker der Sowjetunion war, wollten es Alexandroff und Kolmogoroff offenbar vermeiden, daß er in irgendeiner Weise mit der russischen Ausgabe des Buches in Zusammenhang gebracht würde, weil dies das Projekt möglicherweise ernsthaft gefährdet hätte. Lusin wird aber überall korrekt zitiert so wie in Hausdorffs Original.

[108] Es handelt sich um [H 1931].

[109] Die dritte Auflage hat im August 1936 in Moskau offenbar nicht vorgelegen. Auf welche Information sich Alexandroff und Kolmogoroff hier beziehen, ist unklar. Aus keiner bisher bekannten Quelle geht hervor, daß Hausdorff eine solche Absicht gehabt hat.

einen neuen Paragraphen „Mengenoperationen"; ansonsten ist der grösste Teil von HAUSDORFFs Text vorhanden. Kapitel VI „Topologische Räume" ist vollkommen neu und stellt einen Auszug aus den Kapiteln 1 und 2 von [AH 1935] dar. Das nächste Kapitel VII „Metrische Räume" beginnt mit einem Paragraphen über vollständige Räume. Darin ist der Abschnitt über dyadische Mengen und Mächtigkeitssätze eine wörtliche Übersetzung der entsprechenden Passagen in § 26 von HAUSDORFFs Buch. Die weiteren Paragraphen dieses Kapitels mit den Titeln „Mengenräume", „Zusammenhang in metrischen Räumen", „Jordansche Kontinua" enthalten zwar einzelne Textstücke aus der *Mengenlehre*, sind im übrigen aber neu verfaßt. Das Kapitel VIII ist mit „Deskriptive Mengenlehre" überschrieben. Es beginnt mit HAUSDORFFS § 32 „Die Borelschen und Suslinschen Mengen" in weitgehend wörtlicher Übersetzung, aber mit einem neu verfaßten zusätzlichen Abschnitt. Der Mächtigkeitssatz auf S. 179 von [H 1927a] heißt in der russischen Ausgabe „Theorem von Alexandroff-Hausdorff". Der § 33 „Existenzbeweise" ist neu verfaßt. Der § 34 „Kriterien für Borelsche Mengen" ist wörtlich übersetzt, enthält aber einen zusätzlichen Abschnitt „Hinreichende Bedingungen (Zweite Methode)". Kapitel VIII bringt dann noch zwei Paragraphen: „Stetige Bilder Borelscher und Suslinscher Mengen" und „Topologische Invarianz von Mengenklassen". Der erste enthält das meiste aus HAUSDORFFS § 37 in wörtlicher Übersetzung, der zweite beginnt mit HAUSDORFFs G_δ-Satz ([H 1924], [H 1927a], S. 214, Satz III, hier auch „Satz von Alexandroff-Hausdorff" genannt), ab diesem Satz folgt eine wörtliche Übersetzung von HAUSDORFFS § 38. Kapitel IX „Reelle Funktionen" schließlich ist im wesentlichen eine wörtliche Übersetzung des entsprechenden Kapitels in HAUSDORFFs Buch.

Es deutet nichts darauf hin, daß HAUSDORFF überhaupt etwas von der russischen Ausgabe seines Buches erfahren hat. In den Referatenjournalen, zu denen er mit der Hilfe von E. BESSEL-HAGEN noch Zugang hatte, wird diese Ausgabe nicht erwähnt. Ob er mit der doch sehr weitgehenden Umarbeitung einverstanden gewesen wäre, läßt sich nicht sagen. Es scheint jedenfalls ziemlich sicher zu sein, daß er nicht gefragt wurde; ein Einverständnis seinerseits hätten ALEXANDROFF und KOLMOGOROFF vermutlich erwähnt. Den Verlag brauchte man nicht zu fragen, denn die Sowjetunion hat sich damals um Fragen des Copyright nicht gekümmert.

In der Kampagne gegen LUSIN wurde diesem besonders vorgeworfen, daß er „liebedienerische Beziehungen" zu ausländischen Gelehrten unterhalten habe[110], deren Verdienste über Gebühr herausgestellt habe und es versäumt habe, die großen Verdienste der sowjetischen Mathematik genügend in den Vordergrund zu rücken. Das von ALEXANDROFF und KOLMOGOROFF gezeichnete Vorwort datiert vom 7. August 1936; einen Tag davor war die Stellungnahme der sowjetischen Akademie zum „Fall Lusin" in der *Pravda* veröffentlicht worden, in der zahlreiche Vorwürfe aus der monatelangen Hetzkampagne noch einmal aufgelistet waren. Aus heutiger Sicht muß man es würdigen, daß ALEXANDROFF

[110] [Pa 1997], S. 138–140.

und KOLMOGOROFF in dieser Situation eine *Teoria mnoshestvch* unter HAUSDORFFs Namen herausbrachten und nicht – die wörtlich übersetzten Kapitel auch noch modifizierend – unter ihrem eigenen Namen. Dies hätte ganz im Rahmen der offiziellen sowjetischen Wissenschaftspolitik gelegen; daß sie es nicht taten, kann vielleicht als ein Indiz für die tiefe Verehrung und Dankbarkeit gegenüber HAUSDORFF gewertet werden.[111]

Die englische Ausgabe der *Mengenlehre*, deren erste Auflage 1957 bei Chelsea in New York erschien, ist eine wörtliche Übersetzung von [H 1935a][112], ausgeführt von einer Gruppe von Mathematikern unter Leitung von JOHN R. AUMANN. Vorangestellt ist ein ganz kurzes „Editor's Preface", gezeichnet mit A. G., aus dem lediglich hervorgeht, daß sich die Übersetzungsarbeit lange hingezogen hat und daß dem Herausgeber A. G. die Endredaktion oblag. In der zweiten Auflage (1962) sind zwei je reichlich eine halbe Seite umfassende Zusätze von R. L. GOODSTEIN angefügt: „Appendix E, on the contradictions in Naive Set Theory" und „Appendix F, on the Axiom of Choice".

Die englische Ausgabe war ein sehr erfolgreiches Buch: die vierte Auflage erschien 1991, fast 80 Jahre nach der Entstehung des größten Teiles dieses Werkes.

Literatur

[AH 1935] ALEXANDROFF, P.; HOPF, H.: *Topologie I.* Springer-Verlag, Berlin 1935.

[Al 1916] ALEXANDROFF, P.: *Sur la puissance des ensembles mesurables B.* Comptes Rendus Acad. Paris **162** (1916), 323–325.

[Ale 1947] ALEXIEWICZ, A.: *On Hausdorff classes.* Fundamenta Math. **34** (1947), 61–65.

[B 1899] BAIRE, R.: *Sur les fonctions de variables réelles.* Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 3, **3** (1899), 1–123.

[BBHL 1905] BAIRE, R.; BOREL, E.; HADAMARD, J.; LEBESGUE, H.: *Cinq lettres sur la théorie des ensembles.* Bulletin de la Société Mathématique de France **33** (1905), 261–273.

[Ba 1931] BANACH, S.: *Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen.* Fundamenta Math. **17** (1931), 283–295.

[Bo 1898] BOREL, E.: *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, Paris 1898.

[Br 1996] BRIESKORN, E. (Hrsg.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Aspekte seines Werkes.* Vieweg, Braunschweig - Wiesbaden 1996.

[111]S. dazu auch Band II dieser Edition, S. 57–58, ferner die Korrespondenz ALEXANDROFF–HAUSDORFF im Band IX dieser Edition.

[112]Ein Nachdruck von [H 1935a] war bereits 1944 von Dover veranstaltet worden.

[Ca 1872] Cantor, G.: *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* Math. Annalen **5** (1872), 123–132.

[Ca 1882] Cantor, G.: *Über unendliche lineare Punctmannichfaltigkeiten.* Teil III. Math. Annalen **20** (1882), 113–121.

[Ch 2002] Chatterji, S. D.: *Hausdorff als Maßtheoretiker.* Mathematische Semesterberichte **49** (2002), 129–143.

[D. 1928] D. (Anonymus): *F. Hausdorff, Mengenlehre.* Nieuw Archief voor Wiskunde **15** (1928), 410–412.

[DL 1999] Demidov, S. S.; Levshin, B. V. (Hrsg.): *Der Fall von Akademiemitglied Nikolai N. Lusin* (Russisch). RKhGI, St. Petersburg 1999.

[En 1977] Engelking, R.: *General Topology.* PWN, Warszawa 1977.

[Fei 1928] Feigl, G.: *F. Hausdorff, Mengenlehre.* Jahresbericht der DMV **37** (1928), 56–58.

[Fr 1923] Fraenkel, A.: *Einleitung in die Mengenlehre.* 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1923.

[Fr 1927] Fraenkel, A.: *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre.* Teubner, Leipzig - Berlin 1927.

[Geh 1927] Gehman, H. M.: *Hausdorff's Revised Mengenlehre.* Bulletin of the AMS **33** (1927), 778–781.

[Hag 1997] Hagenlücke, H.: *Deutsche Vaterlandspartei. Die nationale Rechte am Ende des Kaiserreiches.* Beiträge zur Geschichte des Parlamentarismus und der politischen Parteien, Band 108. Düsseldorf 1997.

[Hahn 1928] Hahn, H.: *F. Hausdorff, Mengenlehre.* Monatshefte für Mathematik und Physik **35** (1928), 56–58.

[Hu 1930] Hurewicz, W.: *Zur Theorie der analytischen Mengen.* Fundamenta Math. **15** (1930), 4–17.

[KL 1930a] Kantorovitch, L.; Livenson, E.: *Sur les δs-fonctions de M. Hausdorff.* Comptes Rendus Acad. Paris **190** (1930), 352–354.

[KL 1930b] Kantorovitch, L.; Livenson, E.: *Sur les ensembles projectifs de M. Lusin.* Comptes Rendus Acad. Paris **190** (1930), 1113–1115.

[KL 1931] Kantorovitch, L.; Livenson, E.: *Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets (I).* Fundamenta Math. **18** (1931), 214–279.

[KL 1933] KANTOROVITCH, L.; LIVENSON, E.: *Memoir on the Analytical Operations and Projective Sets (II).* Fundamenta Math. **20** (1933), 54–97.

[Ka 1936] KAMKE, E.: *F. Hausdorff, Mengenlehre.* Jahresbericht der DMV **46** (1936), Literarisches, S. *25*.

[Ke 1995] KECHRIS, A. S.: *Classical Descriptive Set Theory.* Springer-Verlag, New York etc. 1995.

[KeLou 1989] KECHRIS, A. S.; LOUVEAU, A.: *Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness.* London Math. Soc. Lecture Note Series, **128**, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1989.

[KeLou 1992] KECHRIS, A. S.; LOUVEAU, A.: *Descriptive set theory and harmonic analysis.* Journal Symb. Logic **57**(2), 413–441.

[Koe 1996] KOEPKE, P.: *Metamathematische Aspekte der Hausdorffschen Mengenlehre.* In [Br 1996], S. 71–106.

[Kol 1928] KOLMOGOROFF, A. N.: *Operations sur les ensembles.* Mat. Sbornik **35** (1928), 414–422.

[Kol 1933] KOLMOGOROFF, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Springer-Verlag, Berlin 1933.

[Kol 1993] KOLMOGOROV, A.: *On operations on sets. II.* In: A. N. SHIRYAEV (Ed.): *Selected Works of A. N. Kolmogorov, vol. III: Information Theory and the Theory of Algorithms.* Kluwer, Dordrecht-Boston-London 1993, 266–274.

[Ku 1933] KURATOWSKI, C.: *Topologie I.* Garasiński, Warszawa–Lwow 1933.

[Ku 1966] KURATOWSKI, C.: *Topology.* Vol. I. Academic Press, New York 1966.

[Ku 1968] KURATOWSKI, C.: *Topology.* Vol. II. Academic Press, New York 1968.

[Le 1905] LEBESGUE, H.: *Sur les fonctions représentable analytiquement.* Journal de Math. (Ser. 6) **1** (1905), 139–216.

[Lo 2001] LORENTZ, G. G.: *Who Discovered Analytic Sets.* Math. Intelligencer **23** (4) (2001), 28–32.

[LoZe 1958] LORENTZ, G. G.; ZELLER, K.: *Series rearrangements and analytic sets.* Acta Mathematica **100** (1958), 149–169.

[Lu 1917] LUSIN, N.: *Sur la classification de M. Baire.* Comptes Rendus Acad. Paris **164** (1917), 91–93.

[Lu 1925a] Lusin, N.: *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue.* Comptes Rendus Acad. Paris **180** (1925), 1572–1574.

[Lu 1925b] Lusin, N.: *Les propriétés des ensembles projectifs.* Comptes Rendus Acad. Paris **180** (1925), 1817–1819.

[Lu 1926] Lusin, N.: *Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs.* Mat. Sbornik **33** (1926), 237–290.

[Lu 1927] Lusin, N.: *Sur les ensembles analytiques.* Fundamenta Math. **10** (1927), 1–95.

[Lu 1928] Lusin, N.: *Sur les voies de la théorie des ensembles.* Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Tomo I. Zanicelli, Bologna 1928, 295–299.

[Lu 1930a] Lusin, N.: *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.* Gauthier-Villars, Paris 1930. Reprint: Chelsea, New York 1972.

[Lu 1930b] Lusin, N.: *Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques.* Fundamenta Math. **16** (1930), 48–76.

[Lu 1943] Lusin, N.: *Sur les paties de la suite naturelle des nombres entiers.* Doklady Akademii Nauk SSSR, (5) **40** (1943), 175–179. Russ. Übersetzung in [Lu 1958], 709–713.

[Lu 1946] Lusin, N.: *Über Teilmengen der Folge der natürlichen Zahlen* (Russisch). Izv. Akademii Nauk SSSR, Ser. Mat. **11** (1947). In: [Lu 1958], 714–722.

[Lu 1958]: Lusin, N.: *Gesammelte Werke. Band II: Deskriptive Mengenlehre* (Russisch). Izdat. Akademii Nauk SSSR, Moskau 1958.

[Me 1987] Mehrtens, H.: *Ludwig Bieberbach and „Deutsche Mathematik“.* Studies in the history of mathematics **26**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1987, 195–241.

[Mo 1982] Moore, G. H.: *Zermelo's Axiom of Choice - Its Origins, Development and Influence.* Springer-Verlag, New York 1982.

[Mos 1980] Moschovakis, Y. N.: *Descriptive Set Theory.* North-Holland, Amsterdam etc. 1980.

[Ne 1999] Neuendorff, O.: *Repertorium der Briefe aus dem Archiv Walter de Gruyter.* Walter de Gruyter, Berlin 1999.

[Pa 1997] Paul, S.: *Die Moskauer mathematische Schule um N. N. Lusin.* Kleine Verlag, Berlin 1997.

[R 1980] Rogers, C. A. (Hrsg.): *Analytic Sets.* Academic Press, London etc. 1980.

[Ro 1928] Rosenthal, A.: *Felix Hausdorff, Mengenlehre.* Deutsche Literaturzeitung **49** (6) (1928), 294–295.

[Si 1927] Sierpiński, W.: *Sur une problème de M. Hausdorff.* Fundamenta Math. **10** (1927), 427–430.

[Si 1930] Sierpiński, W.: *Sur les opérations de M. Hausdorff. (Solution de cinq problèmes de M. Tarski).* Fundamenta Math. **15** (1930), 199–211.

[Si 1933] Sierpiński, W.: *Le théorème d'unicité de M. Lusin pour les espaces abstraits.* Fundamenta Math. **21** (1933), 250–275.

[Si 1937] Sierpiński, W.: *Sur un problème de la théorie générale des ensembles concernant les familles boreliennes d'ensembles.* Fundamenta Math. **29** (1937), 206–208.

[Su 1917] Suslin, M.: *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis.* Comptes Rendus Acad. Paris **164** (1917), 88–91.

[Ta 1936] Tarski, A.: *Sur les classes d'ensembles closes par rapport aux opérations de Hausdorff.* Fundamenta Math. **27** (1936), 277–288.

[Ur 1925/1926] Urysohn, P.: *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes.* Fundamenta Math. **7** (1925), 30–137; **8** (1926), 225–351.

[VP 1916] Vallée Poussin, C. de la: *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire.* Gauthier-Villars, Paris 1916.