Die Vorlesung
"Figur und Rotation der Himmelskörper"
von F. Hausdorff, WS 1895/96, Universität Leipzig

J. Bemelmans[1]

Felix Hausdorff habilitierte sich am 25. Juli 1895 an der Universität Leipzig für die Fächer Astronomie und Mathematik. In seiner Habilitationsschrift *Über die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre* untersucht er, wie man aus der gemessenen Helligkeit eines Sterns auf die tatsächliche Helligkeit schließen kann. Das Licht eines Sterns wird auf dem Weg durch die Atmosphäre zum Teil von dieser absorbiert, und da die Länge dieses Weges und damit der Grad der Absorption von dem Winkel zwischen dem Zenit und der Position des Sterns abhängt, ist die Analyse der Absorption angesichts des komplizierten Aufbaus der Atmosphäre eine schwierige Aufgabe, auch in mathematischer Hinsicht. Hausdorff verwendet in dieser Untersuchung im wesentlichen Methoden der klassische Analysis; dabei wurden aber keine neuen mathematischen Entwicklungen angestoßen, wie wir es von einer Reihe anderer astronomischer Probleme kennen. So führte die Aufgabe, die Bewegung von Planeten zu beschreiben, zur Theorie der Hamiltonschen Systeme, und die Frage nach der Gestalt der Erde und der Himmelskörper gab zum einen der Potentialtheorie wichtige Impulse, zum anderen führte die Untersuchung dieser Frage zur Lösungsverzweigung bei nichtlinearen Integralgleichungen und damit letztlich zur Verzweigungstheorie, die heute ein wichtiges Teilgebiet der nichtlinearen Funktionalanalysis darstellt. Hausdorffs erste Vorlesung *Figur und Rotation der Himmelskörper* aus dem Wintersemester 1895/96 (NL Hausdorff: Kapsel 23: Fasz. 68) ist diesem Fragenkreis gewidmet, und wir wollen im folgenden kurz darstellen, wie dieses Gebiet der Astronomie die Entwicklung der Mathematik beeinflußt hat.

Planeten sind große Massen, die um eine feste Achse rotieren; die damit einhergehenden Kräfte beeinflussen die Gestalt der Planeten, wenn diese als deformierbar angenommen wurden. Wenn wir weitere Kräfte außer Acht lassen, dann wird der Rand Σ eines solchen Himmelskörpers dadurch bestimmt, daß auf ihm die Kraft der Selbstattraktion und die Zentrifugalkraft im Gleichgewicht sind. Wir sprechen daher von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

Mathematisch kann man dieses Gleichgewicht durch die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik beschreiben:

$$-\omega^2 x_1 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + G_1, \quad -\omega^2 x_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + G_2, \quad 0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} + G_3. \tag{1}$$

Hierbei ist $(-\omega^2 x_1,\ -\omega^2 x_2,\ 0)$ die bei der Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die x_3-Achse auftretende Beschleunigung, ρ ist die Dichte, p der

[1] Herr S. Hildebrandt (Bonn) hat mich dazu angeregt, den Zusammenhang zwischen Gleichgewichtsfiguren und der Entstehung der Verzweigungstheorie zu untersuchen. Dafür und für kritische Anmerkungen zu dieser Arbeit möchte ich ihm herzlich danken.

Druck und $G = (G_1, G_2, G_3)$ die Anziehungskraft. Bei konstantem Außendruck folgt aus (1), daß Σ eine Äquipotentialfläche ist; die Summe von Gravitationspotential und dem Potential der Zentrifugalkraft ist auf Σ konstant:

$$\int_\Omega \frac{\rho g}{|x-y|}\, dy + \frac{\omega^2}{2} r^2(x) = \text{const} \quad \forall\, x \in \Sigma. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das von der Materie eingenommene Gebiet, g die Gravitationskonstante und $r(x)$ den Abstand eines Punktes x von der Rotationsachse.

Gesucht ist also eine Fläche Σ, so daß (2) gilt unter der Nebenbedingung, daß das von Σ eingeschlossene Volumen den vorgeschriebenen Wert V_0 hat:

$$\text{vol}\,\Omega = V_0. \tag{3}$$

Dieses physikalische Modell, das wir auf der Basis der Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik formuliert haben, stammt von ISAAC NEWTON. Mit der von ihm entwickelten Gravitationstheorie beschrieb er nicht nur die Bewegung der Planeten, sondern wandte sie bereits in den *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* auf die Frage nach der Gestalt der Erde an. Die Modellierung wie die mathematische Analyse, mit der er den Grad der Abplattung der Erde bestimmt, stellen ein weiteres Stück bewundernswerter NEWTONscher Mathematik dar.

Wie man es von vielen Differentialgleichungen kennt, so wurden auch bei der Aufgabe (2), (3) zuerst Lösungen gefunden, die man in geschlossener Form angeben kann. C. MACLAURIN zeigte 1740, daß ein Rotationsellipsoid mit den Achsen $a_1 = a_2$ und a_3 für geeignete Werte von ω und V_0 die Gleichungen (2) und (3) löst. Den funktionalen Zusammenhang zwischen diesen Größen, der es erlaubt, die Gesamtheit der Rotationsellipsoide zu beschreiben, die (2) und (3) erfüllen, fand J. D'ALEMBERT 1773. Mit $a_1 = a_2 = \sqrt{1+\gamma^2}\, a_3$ und der Normierung $g = 1$ und $V_0 = \frac{4}{3}\pi$ folgt für die Bestimmung der Größe λ, die das Achsenverhältnis a_1/a_2 festlegt:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{(\lambda^2+3)\cdot \arctan\lambda - 3\lambda}{\lambda}. \tag{4}$$

Hieraus folgt, daß es zu gegebenem ω zwei Ellipsoide gibt, die die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, sofern ω unterhalb einer Schranke

$$\omega_M = \sqrt{2\pi \cdot 0{,}2247\ldots}$$

liegt. Von den beiden Ellipsoiden hat eines eine geringe Exzentrizität $e = \lambda/\sqrt{1+\lambda^2}$; die Exzentrizität des zweiten ist größer, und für $\lambda \to \infty$, was $\omega \to 0$ impliziert, konvergiert das zugehörige Ellipsoid gegen eine unendliche Kreisscheibe. Nach einem Resultat von LAPLACE nimmt das Drehmoment M dieser Ellipsoide mit wachsendem e zu, so daß wir, anders als zwischen ω und e, eine eineindeutige Zuordnung zwischen dem physikalischen Parameter M und der Lösung haben.

Nachdem LEGENDRE das Potential eines Ellipsoides durch elliptische Integrale ausgedrückt hatte, wurde es möglich, die Familie der Ellipsoide, die Gleichgewichtsfiguren sind, vollständig zu beschreiben. Das Potential eines Ellipsoids Ω ist eine quadratische Funktion von x:

$$U_\Omega(x) := \int\limits_\Omega \frac{1}{|x-y|}\, dy = A_0 - (A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2) \quad \forall\, x \in \Omega; \tag{5}$$

dabei bezeichnen $A_0, \ldots, A_3$ elliptische Integrale, die insbesondere von den Halbachsen a_1, a_2 und a_3 von Ω abhängen. Die Gleichgewichtsbedingung (2) wird dann zu

$$A_0 - (A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2) + \frac{\omega^2}{2}\,(x_1^2 + x_2^2) = C$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^3$ mit $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} + \dfrac{x_3^2}{a_3^2} = 1$. Eliminiert man hieraus x_3 und wertet die Gleichung an den Endpunkten der Halbachsen aus, so folgt

$$a_1^2\left(\frac{\omega^2}{2} - A_1\right) = a_2^2\left(\frac{\omega^2}{2} - A_2\right) = -a_3^2\, A_3 = C - A_0. \tag{6}$$

Wenn die erste dieser Gleichungen dadurch erfüllt wird, daß wir $a_1 = a_2$ setzen, erhalten wir die Rotationsellipsoide von MACLAURIN. Nun zeigte JACOBI 1834, daß es zu beliebig vorgegebenem Achsenverhältnis a_1/a_2 Zahlen a_3, ω und C gibt, so daß (6) erfüllt ist. Damit wies er eine Familie von Ellipsoiden mit drei verschieden langen Achsen als Lösungen nach. Für $a_1/a_2 = 1$ fällt das Jacobi-Ellipsoid mit einem der MacLaurinschen Reihe zusammen; der zugehörige Wert von ω ist $\omega_J = \sqrt{2\pi \cdot 0,1871\ldots}$. Für $a_1/a_2 \to \infty$ folgt $a_3 \to 0$ und $\omega \to 0$, und die Ellipsoide konvergieren gegen eine unendlich lange Nadel.

JACOBIs Resultat ist vor allem deshalb beeindruckend, weil bei dem gestellten Problem ausschließlich rotationssymmetrische Lösungen erwartet wurden. Wie bei den MacLaurin-Ellipsoiden ist auch hier das Drehmoment eine streng monoton wachsende Funktion von e, der zu a_1 und a_3 gehörenden Exzentrizität.

Weil für jede der beiden Familien von Ellipsoiden die Zuordnung zwischen dem Drehmoment M und der durch die Halbachsen a_1 und a_3 bestimmten Exzentrizität eineindeutig ist, können wir e als Funktion von M darstellen. Während für jedes $M \in [0, \infty)$ ein MacLaurin-Ellipsoid existiert, dessen Exzentrizität mit $e_m(M)$ bezeichnet sei, haben wir die entsprechende Funktion $e_j(M)$ nur für $M \in [M_j, \infty)$, wobei M_j das zur Lösung für $\omega = \omega_j$ gehörige Drehmoment ist. Die Graphen dieser beiden Funktionen veranschaulichen eine Eigenart der Lösungsmenge, die in moderner Terminologie Lösungsverzweigung heißt. Wir haben zunächst die Grundlösung e_m, die für alle Werte von M existiert und im Bereich $[0, M_j)$ die einzige Lösung darstellt. Von dem Graphen von e_m zweigt im Punkt $(M_j, e_m(M_j))$, dem Verzweigungspunkt, der Graph von e_j ab, so daß es im Bereich (M_j, ∞) zwei Lösungszweige gibt. Für viele physikalische Probleme, bei denen Lösungsverzweigung auftritt, ist typisch, daß die im Verzweigungspunkt hinzukommende Lösung weniger symmetrisch ist als die Grundlösung (Symmetriebrechung) und daß die Grundlösung im Bereich $[0, M_j)$ stabil gegenüber Störungen ist, ab M_j aber die Elemente des neuen Lösungszweiges stabil sind (Austausch der Stabilität).

Mit JACOBIS Beitrag ist zweifellos eine Lösungsverzweigung gegeben, es ist allerdings zu fragen, ob das bereits JACOBI so gesehen hat. Seine Arbeit [J 1834] ist nur drei Seiten lang, und er beschränkt sich dort auf den Nachweis, daß (6) auch für $a_1 \neq a_2$ Lösungen zuläßt. Eine genauere Beschreibung der Lösungsmenge lieferte sein Schüler C. O. MEYER in seiner Dissertation, vgl. [M 1842]. Er diskutiert insbesondere, wie die Familie der Jacobi-Ellipsoide in die der rotationssymmetrischen Lösungen einmündet. Dabei liest er aber die Abbildung 1 von rechts nach links; er beginnt also mit der unendlich langen Nadel (cylindrus infinite magnus), die zu $M = \infty$ gehört und zeigt dann, daß (mit abnehmendem M) die Familie der Jacobi-Ellipsoide in einem rotationssymmetrischen Ellipsoid endet. Damit ist u. E. keine Lösungsverzweigung beschrieben.[2]

[2] Weil in der Literatur auch die gegenteilige Ansicht vertreten wird, soll MEYERS Zusammenfassung seiner Ergebnisse, soweit sie diesen Punkt betrifft, kurz angeführt werden: Cylindrus infinite magnus cum basi circulari abit in Ellipsoidam tribus axibus inaequalibus praeditam, basis circularis abit in ellipsin magis magisque excentricam, cujus axis minor fit axis rotationis, axis major fit axis minor aequatoris; aequatoris excentricitas continuo minuitur usque dum evadit circulus ipsaque Ellipsoida in priorem speciem revolutione genitarum redit ([M 1842], p. 54).

Die erste nach heutigem Verständnis vollständige Beschreibung einer Lösungsverzweigung finden wir in der Arbeit [R 1861] von B. Riemann. Das dort untersuchte Modell einer Gleichgewichtsfigur ist wesentlich allgemeiner als das oben vorgestellte, weil nunmehr auch Relativbewegungen innerhalb des Flüssigkeitskörpers zugelassen sind. Für den Fall, daß die Geschwindigkeit an der Stelle (x_1, x_2, x_3) zu jedem Zeitpunkt t eine lineare Funktion der Ortskoordinaten ist und daß die Gestalt $\Omega(t)$ der Gleichgewichtsfigur für alle t ein Ellipsoid ist, gelang Riemann eine vollständige Beschreibung der Lösungsmenge. Er wies insbesondere vier Familien von Lösungen nach, bei denen die Gestalt zeitlich konstant ist. Diese Ellipsoide rotieren mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω; im Inneren können sich die Teilchen auf elliptischen Bahnen um die Achse bewegen, so daß z. B. nach einer Umdrehung des Ellipsoids ein Teilchen die Achse bereits zweimal umlaufen hat. Die Ellipsoide von MacLaurin und Jacobi sind Spezialfälle dieser Lösungen. Riemann beschreibt, welche dieser Familien stetig ineinander übergehen, und er weist ferner den "Austausch der Stabilität" für ein MacLaurin-Ellipsoid nach. Für $\omega < \omega_R = \sqrt{2\pi \cdot 0,2201\ldots}$ sind die MacLaurin-Ellipsoide stabil, in $\omega = \omega_R$ zweigt eine Familie von Ellipsoiden mit drei verschiedenen Achsen ab, in denen es innere Strömungen gibt. Für $\omega > \omega_R$ sind die Elemente dieses Lösungszweigs stabil; sie sind weniger symmetrisch als die MacLaurin-Ellipsoide.

Bei nichtlinearen Gleichungen sind häufig nur wenige Lösungen bekannt, die man in geschlossener Form angeben kann, und diese sind meistens nicht sehr interessant. Im vorliegenden Fall ist die Menge der explizit bekannten Lösungen so reichhaltig, daß man darin sogar eine Lösungsverzweigung findet.

Später gelang es V. A. Ljapunow, E. Schmidt und L. Lichtenstein, weitere Lösungen nachzuweisen. Für bestimmte Werte ω^* werden die Elemente der in ω^* abzweigenden Familie als Graphen über der zu ω^* gehörenden, explizit bekannten Lösung gesucht. Damit wird aus (2) eine nichtlineare Integralgleichung für eine Unbekannte ζ aus einem Funktionenraum $\mathcal{X}$; deren Linearisierung hat für $\omega = \omega^*$ einen endlich-dimensionalen, nichttrivialen Nullraum $\mathcal{N}$, und der Nachweis abzweigender Lösungen geschieht mittels der Ljapunow-Schmidt-Reduktion. Die nichtlineare Integralgleichung wird dabei auf einen unendlich-dimensionalen Teilraum von $\mathcal{X}$ projiziert; dort ist die Linearisierung invertierbar und die nichtlineare Gleichung im Kleinen lösbar. Ob diese Lösung dann zu einer Lösung des ursprünglichen Problems führt (oder auch zu mehreren Lösungen), wird anhand der endlich-dimensionalen Verzweigungsgleichungen entschieden. Damit sind wir bei den interessantesten Beiträgen zur Verzweigungstheorie angekommen, die im Zusammenhang mit Gleichgewichtsfiguren erbracht wurden. Das meiste wurde jedoch erst nach Hausdorffs Vorlesung bekannt, und da sich Hausdorff nach 1895/96 nicht mehr mit diesem Gebiet befaßte, wollen wir es hier bei einer kurzen Erwähnung belassen.

Die Vorlesung *Figur und Rotation der Himmelskörper* besteht aus drei Teilen: I. Die Bewegung eines starren Körpers im Gravitationsfeld von Punktmassen, II. Potentialtheorie, III. Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten.

In Teil I werden insbesondere die Einflüsse von Sonne und Mond auf die Rotation der Erde analysiert; dabei ist die Darstellung HAUSDORFFS von Präzession und Nutation der Erdachse dadurch ausgezeichnet, daß die Phänomene nicht nur erklärt und mathematisch beschrieben werden, sondern daß umfangreiche Näherungsrechnungen durchgeführt werden. Die Ergebnisse vergleicht HAUSDORFF dann mit den entsprechenden Werten aus den Tafeln der Eklipsen von T. VON OPPOLZER, vgl. [O 1887]. Schon hier wird ganz deutlich, daß es sich um eine Vorlesung für angehende Astronomen handelt; dann reicht es nicht aus, ein Phänomen nur qualitativ zu beschreiben und die Differentialgleichung zu analysieren. Ziel der mathematischen Analyse sind konkrete Zahlenwerte, die man mit gemessenen Größen vergleichen kann. Diese Ausrichtung der Vorlesung wird noch deutlicher in Teil III.

Gegenstand von Teil II der Vorlesung ist die Theorie des Newton-Potentials. HAUSDORFF beginnt mit ganz grundlegenden Eigenschaften wie dem Gaußschen Integralsatz, dem Mittelwertsatz, der Eindeutigkeit der Lösungen des Dirichlet-Problems und dem Verhalten des Volumen- und des Flächenpotentials beim Durchgang durch die Fläche. Die Transformation der Laplace-Gleichung auf beliebige orthogonale Koordinaten führt er durch, indem er das Dirichlet-Integral transformiert. Dann treten Fragen in den Vordergrund, die direkt mit Gleichgewichtsfiguren zu tun haben. So wird das Potential eines homogenen, dreiachsigen Ellipsoids berechnet, dann eines unendlichen, elliptischen Zylinders, und schließlich folgt die Entwicklung des Potentials nach Kugelfunktionen, was den größten Teil dieses Kapitels ausmacht. Den Abschluß bilden die Untersuchung des Potentials eines beliebigen Rotationskörpers sowie des Potentials zweier Körper, womit die Fragestellung aus Teil I verallgemeinert wird, wo es um die Wirkung von Massenpunkten auf einen Körper ging.

Aus diesem Teil der Vorlesung soll nun ein längerer Abschnitt wörtlich wiedergegeben werden.[3]

Das Potential eines homogenen dreiachsigen Ellipsoids werden wir hier auf einem von Gauss angegebenen Wege ableiten. Die directe Behandlung ist nur für den Fall des inneren Punktes bequem. Ein sehr elegantes, aber künstliches Verfahren, das auf der Einführung eines discontinuirlichen bestimmten Integrals beruht, hat Dirichlet gefunden (Vorlesungen über bestimmte Integrale von Meyer-Dirichlet). (Fasz. 68, Bl. 32)

DIRICHLET weist in [D 1846a] nach, daß

$$W(x,y,z) = \pi abc \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\, ds \qquad (*)$$

das Potential des Ellipsoids

$$E = \left\{ (\xi,\eta,\zeta) : \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} < 1 \right\}$$

[3] Hier und im folgenden sind alle Auszüge aus HAUSDORFFS Vorlesungsmanuskript kursiv gesetzt.

mit konstanter Massendichte $\rho \equiv 1$ für (x, y, z) außerhalb von $\overline{E}$ ist; dabei ist σ eindeutig durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\sigma} + \frac{y^2}{b^2+\sigma} + \frac{z^2}{c^2+\sigma} = 1 \tag{**}$$

festgelegt, d. h. σ bestimmt dasjenige zu E konfokale Ellipsoid, auf dem (x, y, z) liegt. Während nun Gauss – und ihm folgend Hausdorff – nachweist, daß man den Ausdruck

$$\int\limits_E \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\, d\xi d\eta d\zeta$$

durch Einführung geeigneter Koordinaten und entsprechende, keineswegs leichte Transformationen auf die Gestalt $(*)$ bringen kann, zeigt Dirichlet einen Eindeutigkeitssatz, der besagt, daß eine Lösung von $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{E}$ eindeutig ist, wenn sie bestimmte Regularitätseigenschaften auf dem Rand von E und im Unendlichen erfüllt. Diese Eigenschaften sind für W aus $(*)$ leicht zu verifizieren, wenn man die Gleichungen für $\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}$ ausnutzt, die sich aus $(**)$ ergeben. Wie Dirichlet in [D 1846b] ausführt, hat er den Eindeutigkeitssatz bewiesen, "um den irgendwoher bekannten Ausdruck [sc. $(*)$ als Potential des Ellipsoids] zu verificiren" und so die "question célèbre" nach dem Potential des homogenen Ellipsoids zu beantworten. Daß ein Volumenpotential, welches im Inneren von der Form $D - Ax^2 - By^2 - Cz^2$ ist, von einem Ellipsoid herkommt, hat E. Hölder vermutet und in zwei Raumdimensionen im Kleinen bewiesen, vgl. [H 1932]; in [Ni 1932] griff W. Nikliborc diese Frage auf und bewies den allgemeinen Fall in zwei und drei Dimensionen. Ein weiterer Beweis stammt von P. Dive, vgl. [Di 1931a], [Di 1931b].

Wir folgen nun wieder dem Text der Vorlesung:

xyz sei ein Punkt des Ellipsoids, $\xi\eta\zeta$ sei der angezogene Punkt, R nach Grösse und Richtung die Entfernung $\xi\eta\zeta - xyz$, $d\tau = dxdydz$ ein Volumenelement des Ellipsoids, $d\sigma$ sein Oberflächenelement, μ seine (überall gleiche) Dichtigkeit, abc seine Halbachsen,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{a}$$

die Gleichung seiner Oberfläche. Wir können, nach den früher abgeleiteten Formeln, die Volumenintegrale durch die Flächenintegrale ausdrücken und haben (Gleichungen (2), (6), (7)):

$$V = \mu \int \frac{d\tau}{R} = -\frac{1}{2}\mu \int \cos(Rn)\, d\sigma \tag{b}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\mu \int \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R}\, d\tau = \mu \int \frac{\cos(nx)}{R}\, d\sigma = -\mu \int \frac{\cos(Rn)\, \cos(Rx)}{R}\, d\sigma\,. \tag{c}$$

Endlich

$$-\int \frac{\cos(Rn)}{R^2}\, d\sigma = \left\{ \begin{array}{lr} 0 & \textit{außerhalb} \\ 2\pi, \quad \textit{je nachdem } \xi\eta\zeta \textit{ a. d. Oberfläche} \\ 4\pi & \textit{innerhalb} \end{array} \right\} \qquad \text{(d)}$$

des Ellipsoids liegt. (Fasz. 68, Bl. 32)

Bei den Gleichungen (b), (c), (d) handelt es sich um die grundlegenden Formeln der Potentialtheorie, die er in einem früheren Abschnitt vollständig bewiesen hat. Sie ergeben sich aus der partiellen Integration

$$\int \frac{\partial v}{\partial x}\, d\tau = -\int v \cos(nx)\, d\sigma,$$

wenn man speziell $v = \frac{x-\xi}{R} \cdot f(x,y,z)$ und dann $f = \frac{1}{2}$, $f = \frac{1}{R}$, $f = \frac{1}{R^2}$, $f = \frac{x-\xi}{R^2}$ wählt. Die Schreibweise $\cos(nx)$ für die x-Koordinate der Einheitsnormalen bzw. $\cos(Rx)$ für die erste Komponente des Vektors $\frac{1}{R}(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ ist heute nicht mehr gebräuchlich. Die Sprungrelationen ergeben sich aus der Singularität der Integranden.

Hausdorff führt dann in (b), (c) und (d) elliptische Koordinaten ein.

$$x = a\cos\psi \sin\vartheta \quad y = b \sin\psi \sin\vartheta \quad z = c\cos\vartheta. \qquad \text{(e)}$$

Dabei ergibt sich insbesondere für das Potential V die Beziehung

$$2V = \mu \iint \frac{u}{R}\, abc \sin\vartheta\, d\psi d\vartheta = \mu\, abc \cdot 2W$$

mit $u = \frac{x\cdot(x-\xi)}{a^2} + \frac{y\cdot(y-\eta)}{b^2} + \frac{z\cdot(z-\zeta)}{c^2} = 1 - \left(\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} + \frac{z\zeta}{c^2}\right)$,
schließlich

$$\iint \left[\left(\frac{x\xi}{a^4} + \frac{y\eta}{b^4} + \frac{z\zeta}{c^4}\right)\frac{1}{R} - \frac{u^2}{R^3}\right] \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi \qquad \text{(f)}$$

$$= \frac{v}{abc} \cdot \left\{ \begin{array}{lr} 0 & \textit{außerhalb} \\ 2\pi, \quad \textit{je nachdem } \xi\eta\zeta \textit{ auf der} & \textit{Oberfläche} \\ 4\pi & \textit{innerhalb} \end{array} \right\}$$

des Ellipsoids liegt.

v ist hierbei die Größe $-1 + \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}$, die nicht von der Integrationsvariablen abhängt.

Nach diesen Umformungen führt er nun den entscheidenden Gedanken zur Berechnung des Potentials aus, daß nämlich das gegebene Ellipsoid eingebettet wird in eine Schar konfokaler Ellipsoide mit Halbachsen $\sqrt{a^2+2\nu}$, $\sqrt{b^2+2\nu}$

und $\sqrt{c^2+2\nu}$ und daß man die Abhängigkeit des Potentials von dem Parameter ν untersucht.

Dies [d. s. die Koordinatentransformationen] *vorausgeschickt, betrachten wir das gegebene Ellipsoid als einer Schar* confocaler *Ellipsoide angehörig, deren Halbachsen den Gleichungen genügen*

$$a^2 = a_0^2 + 2\nu, \quad b^2 = b_0^2 + 2\nu, \quad c^2 = c_0^2 + 2\nu, \tag{q}$$

und suchen die Änderung von V oder W, wenn sich der Parameter ν ändert, also unser Ellipsoid in das nächst benachbarte der Schar übergeht. Bezeichnen wir die entsprechenden Änderungen durch δ, so ist

$$a\,\delta a = b\,\delta b = c\,\delta c = \delta\nu, \quad \delta\left(\frac{x}{a}\right) = 0, \quad \delta\left(\frac{y}{b}\right) = 0, \quad \delta\left(\frac{z}{x}\right) = 0,$$

$$\frac{\delta x}{\delta\mu} = \frac{x}{a^2}, \quad \frac{\delta y}{\delta\nu} = \frac{y}{b^2}, \quad \frac{\delta z}{\delta\nu} = \frac{z}{c^2}, \quad \frac{\delta u}{\delta\nu} = \frac{x\xi}{a^4} + \frac{y\eta}{b^4} + \frac{z\zeta}{c^4},$$
$$\frac{R\,\delta R}{\delta\nu} = (x-\xi)\,\frac{x}{a^2} + (y-\eta)\,\frac{y}{b^2} + (z-\zeta)\,\frac{z}{c^2} = u;$$

$$\begin{aligned}\frac{2\,\delta W}{\delta\nu} &= \iint \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi\left[\frac{\delta u}{R\,\delta\nu} - \frac{u}{R^3}\,\frac{R\,\delta R}{\delta\nu}\right]\\ &= \iint \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi\left[\frac{1}{R}\left(\frac{x\xi}{a^4} + \frac{y\eta}{b^4} + \frac{z\zeta}{c^4}\right) - \frac{u^2}{R^3}\right].\end{aligned}$$

Dies ist die linke Seite der Gleichung (p), also folgt

$$\frac{2\,\delta W}{\delta\nu} = \frac{v}{abc}\cdot\left\{\begin{array}{lr} 0 & \text{außerhalb} \\ 2\pi, & \text{je nachdem } \xi\eta\zeta \text{ a. d. Oberfläche} \\ 4\pi & \text{innerhalb} \\ & \text{des Ellipsoids a, b, c, liegt.}\end{array}\right\} \tag{r}$$

Solange der Punkt $\xi\eta\zeta$ außerhalb des Ellipsoids liegt, ist $\delta W = 0$, also $W =$ constans. Betrachten wir daher zwei confocale Ellipsoide 1 und 2, so ist $W_1 = W_2$, wenn der Punkt außerhalb beider liegt, folglich $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\mu_1 a_1 b_1 c_1}{\mu_2 a_2 b_2 c_2} = \dfrac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2}$, $\mathcal{M}$ die Masse des Ellipsoids. Daraus folgt: *Die Anziehung zweier confocaler Ellipsoide auf einen äußeren Punkt haben gleiche Richtung und verhalten sich wie ihre Massen.* *(Satz von Laplace)*

Den Ausdruck von W selbst findet man aus (r) durch Integration nach ν. Lassen wir ν aus dem Unendlichen kommen, dort verschwindet W, und es ist

$$dW = 2\pi\,d\nu\,\frac{v}{abc},$$

solange das Ellipsoid noch ausserhalb des Punktes $\xi\eta\zeta$ *liegt, d. h. solange* $v < 0$. *In dem Augenblick, wo das Ellipsoid gerade durch den Punkt* $\xi\eta\zeta$ *geht, erhält* $\frac{dW}{d\nu}$ *einen singulären Werth (die Hälfte des vorigen), und wenn sich das Ellipsoid noch weiter zusammenzieht, wird* $\frac{dW}{d\nu} = 0$. *Bezeichnet* abc *das gegebene Ellipsoid,* $a_0b_0c_0$ *das durch den Punkt* $\xi\eta\zeta$ *gehende confocale, so haben wir die Fälle* $a_0 > a$, $a_0 < a$ *zu unterscheiden: für* $a_0 > a$ ($\xi\eta\zeta$ *ein äußerer Punkt) folgt*

$$W_{abc} = \int\limits_{\nu=\infty}^{a_0b_0c_0} \frac{dW}{d\nu}\,d\nu + \int\limits_{a_0b_0c_0}^{abc} \frac{dW}{d\nu}\,d\nu,$$

und da im zweiten Integral $\frac{dW}{d\nu} = 0$ *ist,*

$$W_{abc} = \int\limits_{\infty}^{a_0b_0c_0} \frac{dW}{d\nu}\,d\nu$$

oder mit der Substitution (q)

$$W_{abc} = \int\limits_{\infty}^{0} \frac{2\pi\,d\nu}{\sqrt{(a_0^2+2\nu)(b_0^2+2\nu)(c_0^2+2\nu)}} \left(\frac{\xi^2}{a_0^2+2\nu} + \frac{\eta^2}{b_0^2+2\nu} + \frac{\zeta^2}{c_0^2+2\nu} - 1\right)$$

$$W = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\pi\,ds}{\sqrt{(a_0^2+s)(b_0^2+s)(c_0^2+s)}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a_0^2+s} + \frac{\eta^2}{b_0^2+s} + \frac{\zeta^2}{c_0^2+s}\right).$$

Im Fall $a_0 < a$ ($\xi\eta\zeta$ *ist ein* <u>*innerer*</u> *Punkt) treten* abc *an die Stelle von* $a_0b_0c_0$, *also*

$$W = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\pi\,ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \left[1 - \frac{\xi^2}{a^2+s} - \frac{\eta^2}{b^2+s} - \frac{\zeta^2}{c^2+s}\right]. \qquad \text{(s)}$$

Den Ausdruck von W *im ersten Falle können wir noch etwas umformen. Wir setzen*

$$a_0^2 - a^2 = b_0^2 - b^2 = c_0^2 - c^2 = \sigma$$

und führen $s + \sigma$ *als neue Integrationsvariable ein, dann folgt*

$$W = \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{\pi\,ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2+s} - \frac{\eta^2}{b^2+s} - \frac{\zeta^2}{c^2+s}\right), \qquad \text{(t)}$$

ein Ausdruck, der sich von (s) nur dadurch unterscheidet, dass die untere Grenze der Integration nicht 0, sondern σ *ist. Da* $a_0b_0c_0$ *das durch* $\xi\eta\zeta$ *hindurchgehende Ellipsoid der confocalen Schar bedeutet, so ist*

$$\frac{\xi^2}{a_0^2} + \frac{\eta^2}{b_0^2} + \frac{\zeta^2}{c_0^2} - 1 = 0, \text{ d.h.}$$

$$\frac{\xi^2}{a^2+\sigma} + \frac{\eta^2}{b^2+\sigma} + \frac{\zeta^2}{c^2+\sigma} - 1 = 0 \tag{u}$$

und σ also die positive Wurzel der Gleichung (u), die außerdem noch zwei negative Wurzeln σ besitzt. Diese entsprechen einem durch (u) hindurchgehenden einschaligen und zweischaligen Hyperboloid, die sich miteinander und mit jenem Ellipsoid rechtwinklig schneiden; die 3 Wurzeln der Gleichung (u) heißen elliptische Coordinaten des Punktes $\xi\eta\zeta$. (Fasz. 68, Bl. 33–34)

Mit (s) und (t) ist gezeigt, daß das Potential eines homogenen Ellipsoids im Inneren eine quadratische Funktion der Koordinaten ξ, η und ζ ist. HAUSDORFF schließt die Untersuchung des Potentials ab, indem er die Regularität von V sowie der ersten und zweiten Ableitungen sowie das Verhalten im Unendlichen betrachtet. Ferner wird gezeigt, daß V die Poisson- bzw. die Laplace-Gleichung erfüllt. Damit hat er alle Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes von DIRICHLET nachgewiesen, auf den er zu Beginn verwiesen hatte.

Der Hauptteil der Vorlesung beginnt mit einer Einleitung in die Hydromechanik. Die Bewegungsgleichungen werden in Lagrangeschen und in Eulerschen Variablen gegeben und auf der Basis dieser Differentialgleichungen werden die Gleichgewichtsbedingungen für einen rotierenden Flüssigkeitskörper abgeleitet. Dann folgt der Nachweis spezieller Lösungen, nämlich der Ellipsoide von MACLAURIN bzw. JACOBI sowie von elliptischen Zylindern. Bei der Beschreibung der Ellipsoide mit inneren Strömungen folgt HAUSDORFF der Darstellung von DIRICHLET [D 1860]. Besonders interessant sind HAUSDORFFs Ausführungen zu den allgemeinen Eigenschaften von Lösungen, da auch sie zeigen, daß es ihm weniger um rein mathematische Erkenntnisse als um die Beantwortung konkreter Fragen der Astronomie geht. So ist die Beschreibung der Familien von Ellipsoiden durch die Winkelgeschwindigkeit als Parameter vorteilhaft, wenn man die Lösungsmenge und ihre Verzweigung im Funktionenraum analysieren will. HAUSDORFF führt aber aus, daß vom physikalischen Standpunkt das Drehmoment die gegebene Größe sein muß, zu der man eine Lösung sucht; die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ist dann eine Eigenschaft der Lösung, also im Grunde genommen eine Unbekannte des Problems.

Wir wollen nun in Auszügen den Teil der Vorlesung darstellen, in dem es um die Gleichgewichtsfiguren geht, die MACLAURIN und JACOBI gefunden haben.

Das Gleichgewicht einer <u>gravitirenden</u> Flüssigkeit, d. h. einer solchen, deren Theile einander nach dem Newton'schen Gesetz anziehen, und die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, ist eine viel complizirtere Aufgabe als die bisher behandelten. Nehmen wir die Gleichgewichtsfigur als gefunden an, d. h. wir kennen innerhalb der Flüssigkeit die Flächen gleicher Dichtigkeit

$$f(xyz) = constans, \tag{30}$$

zu denen auch die Oberfläche gehört. Dann können wir das Potential

$$\int \mu' d\tau' [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]$$

der Flüssigkeit auf den inneren Punkt xyz berechnen; die Gleichung der Flächen gleichen Drucks

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = constans \tag{31}$$

muss dann mit (30) coincidiren, oder es muss

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x\right) : \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y\right) : \frac{\partial V}{\partial z} \tag{32}$$

sein. Hier hängt aber V selbst von der Form der Function f ab, und zwar in sehr complicirter Weise; in der That ist die allgemeine Lösung der Aufgabe bis jetzt nicht geglückt.

Ist die Flüssigkeit homogen und incompressibel, so werden zwar die Flächen gleicher Dichtigkeit unbestimmt sein, nichtsdestoweniger muß die Oberfläche (30) der Flüssigkeit eine Fläche gleichen Druckes sein, also den Bedingungen (32) genügen.

Wir versuchen, ob eine gravitierende Flüssigkeit von der beschriebenen Art, wenn sie homogen und incompressibel ist, die Form eines Ellipsoids annehmen kann, setzen also

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Das Potential V ist hier bekannt, nämlich (Dichtigkeit $= \mu$)

$$\begin{aligned} V &= \pi\, abc\, k^2 \mu \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \\ &= \pi\, k^2 \mu\, (D - Ax^2 - By^2 - Cz^2), \end{aligned}$$

wo

$$A = abc \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(a^2+s)}, \quad B = abc \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(b^2+s)},$$

$$C = abc \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta(c^2+s)}, \quad \Delta = +\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}\,. \tag{33}$$

Die Gleichungen (32) werden

$$\frac{2x}{a^2} : \frac{2y}{b^2} : \frac{2z}{c^2} = (-2k^2\mu\pi A x + \omega^2 x) : (-2k^2\mu\pi B y + \omega^2 y) : (-2k^2\mu\pi C z)$$

oder, wenn wir

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \mu} = v \tag{34}$$

setzen

$$\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} = (A - v) : (B - v) : C$$

$$a^2(A - v) = b^2(B - v) = Cc^2. \tag{35}$$

Diese Gleichungen dienen, wenn v gegeben, zur Bestimmung der Verhältnisse $a : b : c$ (von denen die ABC allein abhängen); aus dem Volumen der Flüssigkeit findet man diese selbst.

Aus (35) folgt

$$\begin{aligned} v &= A - C\frac{c^2}{a^2} = B - C\frac{a^2}{b^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{ds\, abc}{\Delta} \frac{s(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 + s)(c^2 + s)} = \int_0^\infty \frac{ds\, abc}{\Delta} \frac{s(b^2 - c^2)}{b^2(b^2 + s)(c^2 + s)}, \end{aligned}$$

also wegen $v > 0$

$$a^2 > c^2, \quad b^2 > c^2. \quad \text{(Fasz. 68, Bl. 71–72)}$$

Damit ist gezeigt, daß bei einer Lösung die Achse des Ellipsoids, die in Richtung der Rotationsachse fällt, stets kleiner sein muß als die beiden übrigen. Mit Hilfe der Größen $\alpha^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$, $\beta^2 = \frac{b^2 - c^2}{c^2}$ und der Integrationsvariablen u mit $c^2 + s = \frac{c^2}{u^2}$ folgen aus (35) die Gleichungen

$$0 = (\alpha^2 - \beta^2) \int_0^1 u^2 du (1 + \alpha^2 u^2)^{-3/2} (1 + \beta^2 u^2)^{-3/2} (1 - u^2)(1 - \alpha^2 \beta^2 u^2) \tag{37}$$

$$v = 2\sqrt{1 + \alpha^2}\sqrt{1 + \beta^2} \int_0^1 u^2 du (1 + \alpha^2 u^2)^{-3/2} (1 + \beta^2 u^2)^{-3/2} (1 - u^2) \tag{38}$$

Die Bedingung (37) wird einerseits erfüllt durch $\alpha = \beta$, andererseits durch Verschwinden des Integrales. (Fasz. 68, Bl. 72)

Im Falle $\alpha = \beta$ ist das Ellipsoid rotationssymmetrisch. Das Integral in (38) kann durch elementare Funktionen ausgedrückt werden, und es gilt

$$v = \frac{3+\alpha^2}{\alpha^3} arctg\ \alpha - \frac{3}{\alpha^3} = \psi(\alpha), \tag{39}$$

und HAUSDORFF diskutiert nun zunächst, für welche Werte von v die Gleichung (39) lösbar ist, dann berechnet er die Achsenverhältnisse eines solchen Ellipsoids für den Fall, daß die gegebenen Daten (Dichte, Winkelgeschwindigkeit, Äquatorialhalbmesser) die der Erde sind. Die Funktion ψ erfüllt $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$, $\psi(\alpha) \geq 0$ und hat genau eine Maximalstelle α'.

Die Gleichung $v = \psi(\alpha)$ hat demnach keine reelle Wurzel α, wenn $v > \psi(\alpha')$; sie hat eine Doppelwurzel $\alpha = \alpha'$, wenn $v = \psi(\alpha')$; endlich hat sie zwei reelle Wurzeln α, die zu beiden Seiten von α' liegen, sobald $v < \psi(\alpha')$.

Durch numerische Rechnung folgt $\alpha' = 2.0293\ldots$, $\psi(\alpha') = 0.22467\ldots$.

Sobald also

$$v = \frac{\omega^2}{2\pi k^2 \mu} > 0.22467\ldots,$$

ist kein Rotationsellipsoid der Gleichgewichtsfigur möglich.

Von den beiden Rotationsellipsoiden, die im Fall $v < 0.22467\ldots$ resultiren, ist das eine weniger, das andere stärker abgeplattet, als dem Werthe α' entspricht. Für sehr kleines v nähert sich das erste einer Kugel, das andere einer unendlich grossen, unendlich dünnen Kreisscheibe. – Sehen wir für das erste v als unendlich kleine Grösse 1. Ordnung an, so wird

$$v = \frac{4}{15}\alpha^2, \quad \alpha^2 = \frac{15}{4}v,$$

und da $\varepsilon = 1 - (1+\alpha^2)^{-1/2} = \frac{\alpha^2}{2}$ die Abplattung ist, $\varepsilon = \frac{15}{8}v = \frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi k^2 \mu}$.

Übertragen wir dies auf die Erde; es sei a der Äquatorialhalbmesser,

$$\mathcal{M} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu$$

die Erdmasse, $g = \frac{\mathcal{M}k^2}{a^2} = \frac{4}{3}\pi\mu k^2 a$ die Schwere am Äquator; dann wird

$$\varepsilon = \frac{5}{4}\frac{\omega^2 a}{g} = \frac{5}{4}\varphi,$$

wobei φ wieder das Verhältnis der Centrifugalkraft zur Schwere am Äquator ist. Mit $\varphi = \frac{1}{288.4}$ erhält man

$$\varepsilon = \frac{1}{232},$$

der beobachtete Werth ist $\varepsilon = \frac{1}{293}$. Die Erde ist aber auch nicht homogen, sondern ihre Dichtigkeit nimmt von aussen nach innen zu.

Wir bemerken, dass $\varepsilon = \frac{5}{4}\varphi$ *(homogene Erde) und* $\varepsilon = \frac{1}{2}\varphi$ *(Erdmasse im Mittelpunkt concentrirt) die beiden Grenzen der Abplattung sind, wenn die Dichtigkeit von aussen nach innen zunehmen soll; in der That liegt die wirkliche zwischen ihnen. Wir kommen bei der Clairautschen Theorie darauf zurück.* (Fasz. 68, Bl. 73)

Den Fall der dreiachsigen Ellipsoide diskutiert HAUSDORFF als nächstes, wobei er auch den Beitrag DIRICHLETs über ellipsoidförmige Lösungen mit inneren Strömungen vorstellt. Die Achsenverhältnisse in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit zu untersuchen, hat den Vorteil, daß die dabei auftretenden Beziehungen leichter zu überblicken sind; vom physikalischen Standpunkt aus ist die Winkelgeschwindigkeit keine gegebene Größe, sondern eine Eigenschaft der Lösung. Mit diesem Punkt befaßt sich HAUSDORFF in dem nun folgenden Abschnitt.

Gleichgewicht einer rotirenden Flüssigkeit, deren Drehungsmoment gegeben ist. Wir sahen bisher die Winkelgeschwindigkeit ω *als gegeben an; diese Grösse ist aber eigentlich gar nicht als gegeben zu denken, da sie selbst von der Gleichgewichtsfigur abhängt, die die Flüssigkeit annimmt. Geben wir z.B. einem homogenen Ellipsoid eine Winkelgeschwindigkeit* ω*, welche die Grösse* $\frac{\omega^2}{2\pi k^2 \mu} = 0.22467$ *überschreitet, so ist kein Gleichgewicht möglich, d. h. die Flüssigkeit nimmt eine andere Form, damit aber auch eine andere Winkelgeschwindigkeit (wenn überhaupt noch eine solche bestehen bleibt) an und kann in dieser neuen Form eine Gleichgewichtslage erreichen.*

Um wirkliche Constanten der Bewegung, d. h. Integrationsconstanten zu finden, betrachten wir die Gleichungen (14) [d. s. die Gleichgewichtsbedingungen in Integralform], *wenden sie auf die gesamte Flüssigkeit an, setzen voraus, dass an deren Oberfläche der Druck überall constant* $= p_0$ *(z. B.* $= 0$*) sei, und dass die Kräfte ein Potential* V *besitzen; dann ist*

$$\int \mu d\tau \left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} \right) =$$

$$\int \mu d\tau \left(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y} \right) + p_0 \int \left[y\cos(nz) - z\cos(ny) \right] d\sigma.$$

Aus den bekannten Formeln

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} d\tau = - \int U \cos(nx) d\sigma$$

folgt, dass die mit p_0 *multiplicirten Glieder verschwinden. Wirken ferner in der Flüssigkeit nur die inneren Kräfte, die wir allein von der Entfernung* R *zweier*

Massentheilchen xyz und $x'y'z'$ abhängig denken, so ist

$$V = \int \mu d\tau' f(R), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \int \mu' d\tau' \frac{df(R)}{dR} \, \frac{x - x'}{R},$$

$$y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y} = \int \mu' d\tau' \frac{df(R)}{R\,dR}(y'z - yz'),$$

$$\int \mu d\tau \left(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \iint \mu d\tau \cdot \mu' d\tau' \cdot \frac{df(R)}{R\,dR} \cdot (y'z - yz'),$$

wo sowohl die Integration nach $d\tau$ als auch die nach $d\tau'$ durch die ganze Masse zu erstrecken ist. Hierbei kommt jede Combination $d\tau$, $d\tau'$ zweimal vor, die entsprechenden Bestandteile des obigen Integrals sind entgegengesetzt gleich, das ganze Integral also 0, die linken Seiten von (14) ebenfalls = 0.

Wirken auf die Theilchen einer Flüssigkeit, an deren Oberfläche constanter Druck herrscht, nur innere Kräfte, so bestehen die drei Flächenintegrale ($\alpha\beta\gamma$ Constanten)

$$\int \mu d\tau \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} \right) = \alpha$$

$$\int \mu d\tau \left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} \right) = \beta$$

$$\int \mu d\tau \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right) = \gamma \; .$$

Damit haben wir wirkliche Integrationsconstanten gewonnen, deren Werthe wir uns gegeben denken können. Wählen wir noch die Ebene, deren Gleichung in laufenden Coordinaten $\xi\eta\zeta$

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0$$

ist, zur xy-Ebene (die sogenannte unveränderliche Ebene), so werden $\alpha = \beta = 0$; die Grösse γ heißt das Drehungsmoment (bei allgemeiner Lage des Achsensystems heißen $\alpha\beta\gamma$ die Drehungsmonente in Bezug auf die x, y, z=achse). Suchen wir die Ausdrücke für diese Grössen bei einem mit der Geschwindigkeit ω um die z=achse rotirenden Ellipsoid abc, dessen Dichtigkeit μ, dessen Masse $\mathcal{M}$. Man hat

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$x = x_0 \cos\omega t - y_0 \sin\omega t, \quad y = x_0 \sin\omega t + y_0 \cos\omega t, \; z = z_0$$

($x_0 y_0 z_0$ Coord. in Bezug auf die Hauptachsen, die im Moment $t = 0$ mit den Coord.achsen zusammenfallen). (Fasz. 68, Bl. 76)

Eine Rechnung zeigt nun, daß es zu jedem gegebenen Wert des Drehmoments $M \geq 0$ genau ein Rotationsellipsoid gibt, welches die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Von dieser Familie zweigt für einen kritischen Wert M' die Familie der dreiachsigen Ellipsoide ab; diese existieren für jedes $M \geq M'$. Als letztes Beispiel geben wir einen Abschnitt der Vorlesung wieder, in dem es um weitere allgemeine Eigenschaften von Gleichgewichtsfiguren und deren physikalische Bedeutung geht.

Satz von Poincaré. Unsere Beispiele zeigten, daß v eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, wenn das Gleichgewicht möglich sein soll (beim Ellipsoid $v \leq 0.22467$, beim elliptischen Cylinder $v \leq \frac{1}{2}$). Es lässt sich nachweisen, dass allgemein für $v > 1$ kein Gleichgewicht möglich ist, indem die Resultante der Anziehung + Centrifugalkraft, die in allen Punkten der Oberfläche zu dieser senkrecht vorausgesetzt wird, dann nicht mehr überall die Richtung der inneren Normale haben kann.

Wenden wir die Gleichung des Green'schen Satzes

$$\int DU\, d\tau = \int \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) d\tau = -\int \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma,$$

worin U nebst seinen ersten Ableitungen im Raume $\int d\tau$ stetig bleiben muss und n die innere Normale des Oberflächenelements $d\sigma$ bezeichnet, auf die Kräftefunction unserer rotirenden Flüssigkeit und den von ihr erfüllten Raum an, setzen also

$$U = V + \frac{\omega^2}{2k^2}\,(x^2 + y^2)$$

so wird $DV = -4\pi\mu,\ D(x^2+y^2) = 4,\ DU = \dfrac{2\omega^2}{k^2} - 4\pi\mu = 4\pi\mu(v-1),$

$$4\pi\mu(v-1)\int d\tau = 4\pi\mathcal{M}(v-1) = -\int \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma,$$

wo $\mathcal{M}$ die Masse der Flüssigkeit. Ist nun $v > 1$, so muß $\displaystyle\int \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma < 0$, also in einem Theil der Oberfläche $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ negativ sein, d. h. die Schwere hat dort die Richtung der äusseren Normale, und die Flüssigkeit, wenn sie dort an den leeren Raum grenzt, wird fortgeschleudert.

Druck im Mittelpunkt einer homogenen Kugel.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen (26) folgt für den Druck

$$dp = \mu dP,$$

wo P das Potential der wirkenden Kräfte ist. [Damit die Flüssigkeit in Ruhe ist, muß die Kraftdichte in den Eulerschen Differentialgleichungen das Potential einer skalaren Funktion sein.] *Im Fall einer homogenen gravitirenden Kugel von der Dichtigkeit μ haben wir für innere Punkte*

$$P = 2\pi\mu k^2 a^2 \left(1 - \frac{1}{3}\frac{r^2}{a^2}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad a \text{ Radius der Kugel.}$$

Also

$$dp = -\frac{4}{3} r\, dr\, \pi \mu^2 k^2$$

und wenn p_0 der Druck im Mittelpunkt, p_1 der an der Oberfläche ist,

$$p_0 - p_1 = \frac{2}{3} a^2 \pi^2 \mu^2 k^2.$$

Für p_1 kann 0, oder wenn man an unsere Erde denkt, der Druck w einer Atmosphäre gesetzt werden. Ist $\mathcal{M}$ die Erdmasse, g die Schwere an der Oberfläche, so ist

$$\mathcal{M} = \frac{4}{3} \pi \mu a^2, \quad g = \frac{\mathcal{M} k^2}{a^2}, \quad p_0 - p_1 = \frac{1}{2} g a \mu.$$

Ist D die Dichtigkeit des Quecksilbers, H die mittlere Barometerhöhe an der Erdoberfläche, so ist

$$v = gDH, \quad p_0 - w = w \cdot \frac{1}{2} \frac{a}{H} \cdot \frac{\mu}{D}.$$

Nimmt man die Dichtigkeit des Wassers zur Einheit, so ist μ (mittlere Enddichtigkeit) $=$ 5.56, $D =$ 13.6, ferner in Metern $a =$ 6378250, $H =$ 0.76, und damit

$$Log \frac{p_0}{w} = 6.23439; \quad \frac{p_0}{w} = 1715500.$$

Der Druck im Mittelpunkt ist also etwa $1\frac{3}{4}$ Million Atmosphären. Selbst wenn die Erde aus Flüssigkeit von sehr geringem Compressibilitätsfactor bestünde, müsste man bei so hohem Druck Veränderungen der Dichtigkeit annehmen, darf also die Erde nicht als homogen ansehen. (Fasz. 68, Bl. 78)

Homogene Gleichgewichtsfiguren können nur für Winkelgeschwindigkeiten ω existieren, die unterhalb einer Schranke ω_{max} liegen; mit der weiter oben festgelegten Normierung ist $\omega_{max} = \sqrt{2\pi}$. Damit geht einher, daß nur für $\omega < \omega_{max}$ im Inneren des Körpers Druck herrscht, vgl. L. LICHTENSTEIN [L 1933]. Wenn HAUSDORFF diese Frage aufgreift, dann geht es ihm weniger um allgemeine Eigenschaften jeder möglichen Lösung als darum zu untersuchen, ob die Annahme eines homogenen Flüssigkeitskörpers überhaupt ein adäquates Modell für Planeten ist. Er berechnet den Druck im Mittelpunkt eines solchen Körpers, wobei er die Daten für die Erde ansetzt, und kommt dann zu dem Schluß, daß die Annahme konstanter Dichte angesichts der großen Druckdifferenzen völlig unrealistisch ist.

Daher wendet er sich den inhomogenen Gleichgewichtsfiguren zu, und von diesem Standpunkt ist dann auch einsehbar, warum er nicht die Stabilität der Ellipsoide untersucht. Diese entscheidet nämlich überhaupt nicht darüber, welche Ellipsoide Planeten beschreiben können; sie sind dafür allesamt ungeeignet, weil sie nur unter der Annahme $\rho = const$ Lösungen sind.

Gleichgewichtsfiguren inhomogener Flüssigkeiten stehen daher im Mittelpunkt von Teil III der Vorlesung. Explizite Lösungen sind für diesen Fall nicht bekannt. Wenn man annimmt, daß die Lösungen aus Flächen konstanter Dichte aufgebaut sind, dann kann man die möglichen Formen dieser Flächen einzugrenzen versuchen, um so zu Aussagen über die Gestalt der Gleichgewichtsfiguren zu kommen. HAUSDORFF zeigt z. B., daß dreiachsige Ellipsoide keine Flächen konstanter Dichte sein können, und er beschreibt Beiträge CLAIRAUTS zu inhomogenen Gleichgewichtsfiguren, wobei er insbesondere Näherungslösungen der Gleichgewichtsbedingungen betrachtet, die in der Nähe der Kugel liegen. Clairauts Theorem, das beschreibt, wie die Schwerkraft von der geographischen Breite abhängt, ist ein typisches Beispiel. Den Abschluß der Vorlesung bilden Beiträge von LAPLACE zum Sphäroid; hierbei sind die Flächen konstanter Dichten ebenfalls nahezu Kugeln.

HAUSDORFFS Vorlesung zeichnet sich dadurch aus, daß einerseits alle mathematischen Aussagen ausführlich bewiesen werden, angefangen von den Integralsätzen bis hin zu Lehrsätzen aus der Potentialtheorie, und daß er andererseits ganz konkrete astronomische Berechnungen verfolgt und daß diese Zielsetzung die Stoffauswahl zu einem großen Teil bestimmt. Zu letzteren gehören die Berechnung von astronomischen Positionen im 1. Teil der Vorlesung (zum Vergleich werden die Werte des Standardwerks *Canon der Finsternisse* von T. EDLER VON OPPOLZER angegeben) sowie die Berechnung von Eigenschaften von Gleichgewichtsfiguren, wobei Größen- und Massenverhältnisse der Erde angesetzt werden.

Mit dieser zweifachen Zielsetzung steht HAUSDORFF in einer Tradition, zu deren herausragenden Vertretern C. NEUMANN gehörte. Seine Beiträge zur Potentialtheorie sind stets anhand von ganz konkreten physikalischen, insbesondere hydrodynamischen Problemen entwickelt worden, wie seine *Hydrodynamischen Untersuchungen* [N 1883] von 1883 eindrucksvoll zeigen. Ebenso ist HAUSDORFF von seinem Lehrer H. BRUNS beeinflußt worden, denn dieser arbeitet in seinem Beitrag [B 1878] *Figur der Erde* von 1878 auf dieselbe Weise: er beweist eine Formel, die die Schwerkraft eines Flüssigkeitskörpers in Beziehung setzt zur mittleren Krümmung von Flächen konstanter Dichte; dabei wird angenommen, daß der Druck nur von der Dichte abhängt. BRUNS' Formel gibt eine mathematisch exakte Eigenschaft von Lösungen der Poisson-Gleichung wieder und ersetzt umständliche Näherungsrechnungen, die die Astronomen bzw. Geodäten früher verwendeten.

Fortgeführt wird diese Tradition, die mit Mathematikern der Universität Leipzig verbunden ist, später durch L. LICHTENSTEIN und seine Schüler E. HÖLDER, E. KÄHLER, K. MARUHN und V. GARTEN, vgl. [L 1933] für einen Überblick über diese Beiträge. Sie untersuchen Gleichgewichtsfiguren für die unterschiedlichsten geometrischen bzw. physikalischen Ansätze wie ringförmige Figuren mit und ohne Zentralkörper, Figuren mit variabler Dichte, und erzielen dabei große Fortschritte in der Verzweigungstheorie. Indem LICHTENSTEIN nämlich die Verzweigung in der Nähe einer beliebigen gegebenen Gleichgewichtsfigur betrachtete, die nicht wie in den Untersuchungen LJAPUNOWS ein Ellipsoid sein muß, gelang es ihm, eine neue Integro-Differentialgleichung aufzustellen, und den Grundgedanken der Verzweigung (Ljapunow-Schmidt-

Reduktion) viel klarer herauszubilden. Anstelle von aufwendigen Entwicklungen in speziellen Koordinaten (diese trugen dazu bei, daß die Arbeiten LJAPUNOWs mehr als 200 Seiten lang wurden) wurde mehr abstrakt mit den Gleichungen gearbeitet und so eine flexible Methode entwickelt, die vielfache Anwendung fand und auch zur Bildung der nichtlinearen Funktionalanalysis entscheidend beitrug. HAUSDORFF hat an dieser Entwicklung nicht mehr teilgenommen. Als die Gleichgewichtsfiguren den vielleicht größten Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik nahmen, hatte er sich bereits ganz anderen Gebieten zugewandt.

Literatur

[B 1878] BRUNS, H.: *Die Figur der Erde. Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung*, Berlin 1878.

[D 1846a] DIRICLET, P. G. L.: *Sur un moyen général de verifier l'expression du potential relatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène*, J. f. Reine u. Angew. Math. **32** (1846), 80–84.

[D 1846b] DIRICLET, P. G. L.: *Über die charakteristischen Eigenschaften des Potentials einer auf einer oder mehreren endlichen Flächen vertheilten Masse*, Ber. Verh. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. (1846), 211–212.

[D 1860] DIRICLET, P. G. L.: *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik*, Abh. Kgl. Ges. Wiss. zu Göttingen (1860), no. 8, 42 pp.

[Di 1931a] DIVE, P.: *Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes*, C. R. **192** (1931), 1443–1446.

[Di 1931b] DIVE, P.: *Sur une propriét'e exclusive des homoïdes ellipsoïdaux*, C. R. **193** (1931), 141–142.

[H 1932] HÖLDER, E.: *Über eine potentialtheoretische Eigenschaft der Ellipse*, Math. Z. **35** (1932), 642-645.

[J 1834] JACOBI, C. G. J.: *Über die Figur des Gleichgewichts*, Annalen der Physik und Chemie **33** (1834), 229–233.

[L 1933] LICHTENSTEIN, L.: *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, Berlin, 1933.

[M 1842] MEYER, C. O.: *De aequilibrii formis ellipsoidicis*, J. für Reine und Angew. Math. **24** (1842), 44–59.

[N 1883] NEUMANN, C.: *Hydrodynamische Untersuchungen nebst einem Anhange über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induktion*, Leipzig, 1883.

[Ni 1932] NIKLIBORC, W.: *Eine Bemerkung über die Volumenpotentiale*, Math. Zeitschrift **35** (1932), 625–631.

[**O 1887**] Edler von Oppolzer, T.: *Canon der Finsternisse*, Wien, 1887.